

## Auxiliar martes 26 de agosto

### Problema 1

Una escudería de la Fórmula 1 ha decidido participar con su piloto estrella Maikel Chumajer en el Gran Premio de Beaucheff. Además de Chumajer existen otros  $N$  pilotos que evalúan participar en la carrera. Se sabe que cada uno de ellos tiene una probabilidad igual a  $p$  de presentarse y con probabilidad  $(1 - p)$  decide no participar por no estar conforme con el rendimiento del auto.

El tiempo que demora Maikel en terminar la carrera se distribuye exponencialmente con media  $\frac{1}{\mu}$  [minutos], mientras que los tiempos de cada uno de los demás autos se distribuye exponencialmente con media  $\frac{1}{\lambda}$  [minutos].

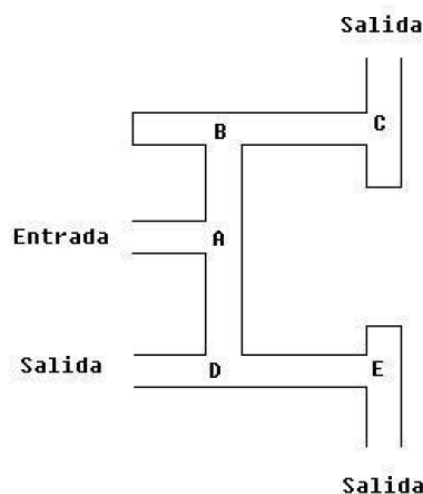
Por otro lado, la Organización de la carrera estima que la cantidad de auspiciadores con que contará para el evento depende de la cantidad de autos que participen. Si participan  $k$  autos se estima que la cantidad de auspicios es una v.a. de Poisson de parámetro  $\alpha \cdot k$ . Con esta información la escudería de Chumajer estima que si el evento cuenta con más de  $M$  auspiciadores serán capaces de convencer al menos a uno de ellos para que patrocine el auto del equipo durante todo el campeonato.

1. (1.5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que participen  $k$  autos en la carrera?. ( $1 \leq k \leq N + 1$ )
2. (1.5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que Chumajer sea el ganador?
3. (1.5 pts.) Si se sabe que existen  $j$  auspicios para el evento, ¿Cuál es la probabilidad de que estén participando  $k$  autos en la carrera?. ( $1 \leq k \leq N + 1$ )
4. (1.5 pts.) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo de Chumajer consiga un sponsor para su auto durante el Gran Premio de Beaucheff ?

### Problema 2

Un grupo de científicos está estudiando el comportamiento de un nuevo robot, llamado TONGOIC. Para ello han diseñado el laberinto que se muestra en la figura.

Se sabe que TONGOIC nunca retrocede y cada vez que se encuentra frente a una intersección puede doblar a la derecha o a la izquierda. En el laberinto hay sólo 5 intersecciones :  $A, B, C, D$  y  $E$ . Si en su recorrido el robot se encuentra con un callejón sin salida, entonces se detiene y se autodestruye.



Laberinto TONGOIC

Después de numerosos ensayos los investigadores han determinado lo siguiente:

La probabilidad de que el robot salga del laberinto es 0.6

El 80 % de las veces TONGOIC escogió doblar a la derecha en su segunda intersección. (esto no significa que la probabilidad de doblar a la derecha en  $B$  es igual a la probabilidad de doblar a la derecha en  $D$  y ambas valen 0,8).

De encontrarse en las intersecciones de  $C$  o  $E$ , el robot repetirá su conducta de la intersección anterior ( $B$  o  $D$ ) con probabilidad 0.7.

El 40 % de las veces TONGOIC escogió doblar a la izquierda en la intersección  $A$ .

Uno de los científicos del grupo, asegura tener una teoría que explica el comportamiento del robot. Tan seguro está de sus descubrimientos que está dispuesto a apostar  $C$  [\$] a que TONGOIC se autodestruirá.

Conteste las siguientes preguntas utilizando el criterio de maximizar el valor esperado.

1. Si usted ha estado presente en el laboratorio y cuenta con la misma información que todos los científicos, ¿Acepta o no la apuesta? (si usted pierde deberá cancelar  $C$  [\$]).
2. Construya un árbol de decisión que le permita decidir cuanto estaría dispuesto a pagar por retrasar la decisión de apostar después de conocer el comportamiento del robot en  $A$ . Determine explícitamente el valor de esta opción.

### Problema 3

Suponga que ud. sale de su casa a comprar un medicamento, para una persona a la cual quiere mucho, y desea volver en el mínimo tiempo posible. Si no lo compra, la persona sufrirá un perjuicio en su salud, cosa que por supuesto ud. no desea. En la ciudad hay  $N$  farmacias.

El tiempo de viaje para ir desde la farmacia  $i$  a la farmacia  $j$  es  $t_{ij}$  [s],  $i, j \in 0, \dots, N$ , donde la “farmacia 0” representa su casa.

El medicamento que ud. desea comprar es muy escaso y es posible que no se encuentre en todas las farmacias. Existe una probabilidad a priori  $p_i$  que el medicamento esté en la farmacia  $i$ . La presencia del medicamento en 2 farmacias cualesquiera son v.a. dependientes en probabilidad: si ud. visita algunas farmacias y encuentra que el medicamento no está disponible en ellas, esa información modifica las probabilidades de encontrarlo en las restantes (en general disminuye la probabilidad de encontrarlo en las que están cerca de una farmacia donde no está el medicamento). Vale decir, la probabilidad de encontrarlo en la farmacia  $i$  es función del itinerario previo.

Entrar a una farmacia a preguntar por el medicamento toma un tiempo de  $\tau$  [s].

1. ¿Cuántas farmacias visitará ud. a lo sumo?
2. Formule un modelo de programación dinámica que permita decidir su itinerario de manera de minimizar el valor esperado del tiempo hasta volver a su casa con el medicamento.

## Solución

### Problema 1

- a) La probabilidad de que participen  $k$  autos es la probabilidad de que vayan  $k-1$  autos de los  $N$  que están evaluando ir y que además vaya Chumajer. Lo que se expresa de la siguiente manera:

$P_k = P(NA = k-1 \cap \text{Chumajer})$ , con  $NA$  el número de autos que decide asistir a la carrera sin incluir a Chumajer,  $NA$  se distribuye según una binomial de parámetros  $(N, p)$ . Como  $NA$  es independiente de lo que haga Chumajer y Chumajer va a la carrera con probabilidad 1, la probabilidad pedida es:

$$P_k = P(NA = k-1) = \binom{N}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \quad (1.5 \text{ pts}).$$

- b) Si asisten  $k$  competidores a la carrera, la probabilidad de que Chumajer gane es:

$P(T_{ch} < \min\{T_i\}_{i=1}^{k-1})$ , donde  $T_{ch} \rightarrow \exp(\mu)$ ,  $\min\{T_i\}_{i=1}^{k-1} \rightarrow \exp((k-1)\lambda)$  (resultado visto en clase Auxiliar), luego:  $P(T_{ch} < \min\{T_i\}_{i=1}^{k-1}) = \frac{\mu}{\mu + (k-1)\lambda}$  (0.5 pts), pero se pide la probabilidad de que Chumajer gane para cualquier número de competidores, de entre los  $N$ , que decidan asistir. Esto es:

$$P(\text{Chumajer Gane}) = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{\mu}{\mu + (k-1)\lambda} P_k \quad (1.0 \text{ pts}).$$

- c) Se pide  $P(NA = k-1 | A = j)$ , con  $A$  el número de auspiciadores. Como esta probabilidad no la sabemos explícitamente aplicamos el teorema de Bayes de la siguiente manera:

$$P(NA = k-1 | A = j) = P(A = j | NA = k-1) \frac{P(NA = k-1)}{P(A = j)} \quad (0.75 \text{ pts}).$$

Resolviendo cada uno de los términos, se tiene que:

$$P(A = j | NA = k-1) = \frac{(\alpha \cdot k)^j e^{-\alpha \cdot k}}{j!}.$$

$$P(NA = k-1) = P_k.$$

$$P(A = j) = Q_j = \sum_{k=1}^{N+1} P(A = j | NA = k-1) \cdot P_k \quad (0.75 \text{ pts}).$$

- d) La probabilidad de conseguir al menos un esponsor es:

$$P(A \succ M) = \sum_{j=M+1}^{\infty} Q_j \quad (1.5 \text{ pts}).$$

### Problema 2

1. Si acepto la apuesta recibiré  $C\$$  y si pierdo tendré que pagar la misma cantidad. Por otro lado si no acepto la apuesta no ganaré ni perderé dinero. No es necesario hacer una árbol de decisión para ver que si acepto la apuesta. La utilidad esperada de será es :

$$\begin{aligned}
 E[\text{Utilidad}] &= C\$ \cdot P[\text{Ganar}] - C\$ \cdot P[\text{Perder}] \\
 &= C\$[P[\text{Robot Sale}] - P[\text{Robot no Sale}]] \\
 &= C\$(0,6 - 0,4) \\
 &= 0,2 \cdot C\$
 \end{aligned}$$

Entonces dado que la cantidad  $C$  es positiva y que el beneficio de no apostar es 0, claramente se aceptará la apuesta.

2. La gracia de esta parte es que si pagamos una cantidad  $Y$  podremos ver que camino toma el robot (en  $A$ ) y luego decidir si apostamos o no. Sin embargo antes de desarrollar el árbol necesitamos conocer algunas probabilidades. De acuerdo a esto definiremos la siguiente notación:

|    |   |                            |    |   |                            |
|----|---|----------------------------|----|---|----------------------------|
| AD | = | Doblar a la derecha en A   | DD | = | Doblar a la derecha en D   |
| AI | = | Doblar a la izquierda en A | DI | = | Doblar a la izquierda en D |
| BD | = | Doblar a la derecha en B   | ED | = | Doblar a la derecha en E   |
| BI | = | Doblar a la izquierda en B | EI | = | Doblar a la izquierda en E |
| CD | = | Doblar a la derecha en C   | i  | = | llegar a i (i=A,B,...,E)   |
| CI | = | Doblar a la izquierda en C |    |   |                            |

Entonces, en función de esta notación, tenemos que el enunciado nos entrega la siguiente información:

$$\begin{aligned}
 P[AD|A] &= 0,6 = 1 - P[AI|A] \\
 0,8 &= P[\text{derecha en segunda intersección}] \\
 &= P[Derecha en 2|B] \cdot P[B] + P[Derecha en 2|d] \cdot P[D] \\
 &= P[BD|B] \cdot P[B] + P[DD|D] \cdot P[D] \\
 &= P[BD|B] \cdot 0,4 + P[DD|D] \cdot 0,6
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 P[CI|C] &= 0,3 = 1 - P[CD|C] \\
 P[ED|E] &= 0,3 = 1 - P[EI|E] \\
 P[A] &= 1 \\
 P[B] &= P[AI|A] \\
 &= 0,4 = 1 - P[D] \\
 P[C] &= P[BD|B] \cdot P[B] \\
 &= P[BD|B] \cdot 0,4 \\
 P[E] &= P[DI|D] \cdot P[D] \\
 &= P[DI|D] \cdot 0,6
 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 0,6 &= P[CI|C] \cdot P[C] + P[DD|D] \cdot P[D] + P[ED|E] \cdot P[E] \\
 0,6 &= 0,3 \cdot P[BD|B] \cdot 0,4 + 0,6 \cdot P[DD|D] + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 1 - P[DD|D]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) encontramos que:

$$\begin{aligned}
 P[BD|B] &= 0,875 \\
 P[DD|D] &= 0,750
 \end{aligned}$$

De acuerdo a esto y utilizando las probabilidades recién calculadas, el árbol asociado al problema es el que se muestra en la figura (ojo que consideramos  $C = \$10,000$ ).

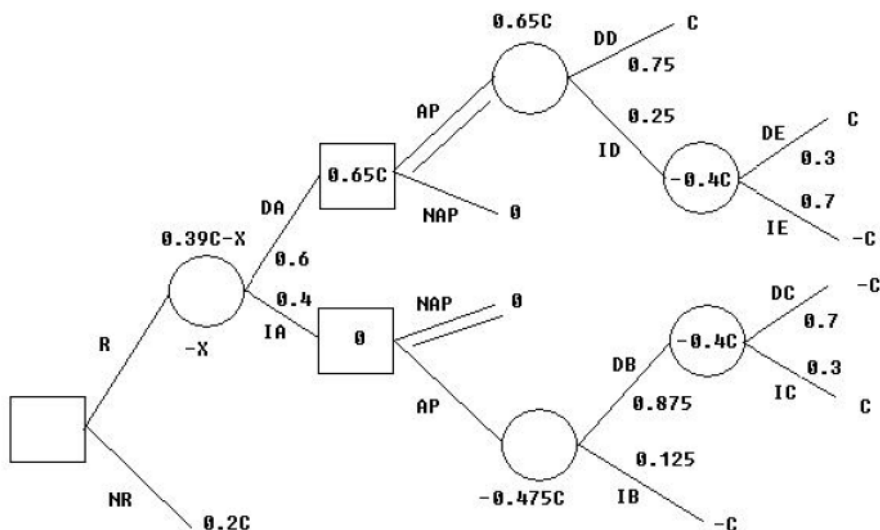
Entonces la estrategia óptima en este caso es:

Si en A el robot se va a la izquierda NO APOSTAR .

Si en A el robot va a la derecha APOSTAR.

De la figura se desprende que el valor esperado de esta política es : \$3.900, luego lo máximo que estaría dispuesto a pagar es:

$$3.900 - 2.000 = \$1.900$$



### Problema 3

Hay que tener claro que a lo sumo se visitaran las  $N$  farmacias, dado que siempre es factible que el medicamento no se encuentre en ninguna de las  $N$  farmacias.

- Etapas: La etapa  $i$  consistira en el viaje a la  $i$  esima farmacia desde la  $i-1$  esima farmacia (ojo que farmacia  $i$  esima  $\neq$  Farmacia  $i$ )
- Variables de estado:

$\vec{S}_i$ , donde:

$$S_{in} = \begin{cases} 1 & \text{Si ya visite la farmacia } n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$F_i$  = Farmacia donde estoy al comienzo de la etapa  $i$

- Variables de decisión:

$X_i$  = Farmacia a visitar al final de etapa  $i$

- Variable aleatoria:

$P_n | \vec{S}_i = P$  [Probabilidad de que el medicamento se encuentre en la farmacia  $n$ ,  
dado que ya visite al conjunto indicado por  $S_i$ ]

- Ecuaciones de recurrencia:

$$\vec{S}_{i+1} = \vec{S}_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow x_i \text{ esima posición}$$

$$F_{i+1} = X_i$$

- Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} S_{1,n} &= 0 \quad \forall n \\ F_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$V_{N+1}^*(\vec{S}_{N+1}, F_{N+1}) = t_{F_{N+1}0}$$

- Función de Beneficios

$$\begin{aligned} V_i(\vec{S}_i, F_i, X_i) = \\ t_{F_i X_i} + \tau + P_{X_i} | \vec{S}_i \cdot [t_{X_i 0}] + (1 - P_{X_i} | \vec{S}_i) \cdot [V_{i+1}^*(\vec{S}_{i+1}, X_i)] \end{aligned}$$

Donde:

$$V_i^*(\vec{S}_i, F_i) = \min_{X_i \neq n \cdot S_{in} \quad \forall n} [V_i(\vec{S}_i, F_i, X_i)]$$