Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: F. Castro, R. Lagos, L. Reus, R. Wolf

Solución Control 1
13 de Abril de 2007

Problema 1

Llamemos A_k al monto total de las apuestas recibidas por el caballo k y G_k al premio que se paga por peso apostado si el caballo k gana. El total de apuestas recibidas es $\sum_{k=1}^{N} A_k$.

1. Si gana el caballo k, el organizador deberá pagar un total de $A_k G_k$ en concepto de premios.
2. El valor esperado de lo que deberá pagar en premios el organizador es $\sum_{k=1}^{N} p_k A_k G_k$.

   Observemos que de la proporcionalidad inversa de los premios respecto de las apuestas se tiene que $A_k G_k = A_j G_j$ para cualquier par de caballos, y por lo tanto sabemos que el valor total a pagar es igual para todos los caballos. Denotemos este valor por Q. Adems, como este valor es igual para todos los caballos, este es el valor esperado a pagar por premios. Es decir, $\sum_{k=1}^{N} p_k A_k G_k = \sum_{k=1}^{N} p_k Q = Q$.
3. Como $G_1 = 1$ en este caso, podemos deducir que $Q = A_1$. Por lo tanto, el valor esperado para el organizador de la carrera es

$$\sum_{k=1}^{N} A_k - A_1 = \sum_{k=2}^{N} A_k \,.$$

4. Si en promedio se paga la misma cantidad que se recauda, entonces $\sum_{k=1}^{N} A_k = Q$ y por lo tanto

$$G_k = \frac{Q}{A_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N} A_k}{A_k} \,.$$

5. De manera similar al punto anterior, lo que se quiere es que

$$\sum_{k=1}^{N} A_k - Q = \alpha \sum_{k=1}^{N} A_k$$

   de lo que deducimos $Q = (1-\alpha)\sum_{k=1}^{N} A_k$ y entonces,

$$G_k = \frac{(1-\alpha)\sum_{k=1}^{N} A_k}{A_k} \,.$$

6. En esta parte consideramos que hay sólo dos caballos. Lo que se quiere calcular es el valor esperado por realizar una apuesta por el caballo k. Primero observemos que, como cuando el caballo k no gana no se recibe ningún premio, basta con calcular el valor esperado del premio que se recibiría si el caballo ganase y multiplicar este valor por la probabilidad que gane p_k.

   Para calcular el valor esperado de este premio debemos considerar todos los casos posibles de apuestas de los aficionados. Para esto, llamemos m al número de aficionados que apuestan por el caballo k (los otros $M-m$ apostarán por otro caballo). De esta manera, el premio esperado a recibir, por peso apostado es:

$$\sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^M \frac{(1-\alpha)(M+1)}{m+1}$$

donde $(M+1)/(m+1)$ es el premio efectivo a recibir si hay m de M aficionados que apostaron por el mismo caballo que Ud.: esto sale del punto 3. anterior, del hecho que el total de apuestas recibidas es $M+1$ y $A_k = m+1$. La suma anterior se puede desarrollar y simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^M \frac{(1-\alpha)(M+1)}{m+1} &= (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^M \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \frac{M+1}{m+1} \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^M \sum_{m=0}^{M} \frac{M!}{m!(M-m)!} \frac{M+1}{m+1} \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^M \sum_{m=0}^{M} \frac{(M+1)!}{(m+1)!((M+1)-(m+1))!} \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^M \sum_{l=1}^{M+1} \binom{M+1}{l} \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}\right)^M (2^{M+1}-1) \\
&= (1-\alpha)\left(\frac{2^{M+1}-1}{2^M}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor esperado de la apuesta por el caballo k es igual a

$$\left(\frac{p_k(1-\alpha)(2^{M+1}-1)}{2^M}\right).$$

Problema 2

1. El valor esperado del requerimiento de almacenamiento es de 45 mil toneladas para un mercado bueno y de 25 mil para un mercado malo.

2. Para plantear este un árbol como el solicitado debemos calcular el valor esperado de los costos para las cuatro situaciones posibles: mercado bueno o malo y bodega grande o chica. Estos costos se resumen en la tabla:

	Mercado bueno	Mercado malo
Bodega 40.000	275	1.200
Bodega 20.000	750	150

Con estos valores podemos construir el árbol (los valores entre paréntesis son las probabilidades) de la Figura 2:

La decisión óptima entonces es construir la bodega de 20 mil toneladas de capacidad.

3. Para resolver esta pregunta debemos calcular algunas probabilidades. Utilizamos la siguiente notación:

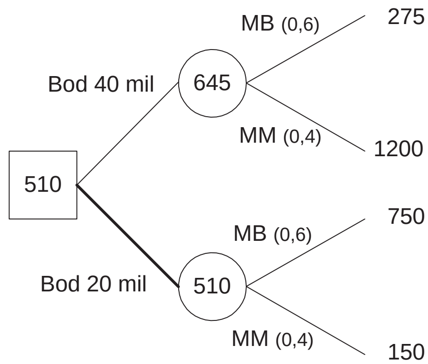

Figura 1: Árbol correspondiente a la parte 2.

MB	:	el mercado resulta bueno;
MM	:	el mercado resulta malo;
CB	:	consultora dice que el mercado estará bueno;
CM	:	consultora dice que el mercado estará malo.

Consultora CasiSiempreAcierta Para esta consultora sabemos que $\mathrm{P(CB|MB)} = 0{,}7$ y que $\mathrm{P(CM|MM)} = 0{,}8$. A partir de estos valores podemos calcular:

$$\mathrm{P(CB)} = \mathrm{P(CB|MB)} \times \mathrm{P(MB)} + \mathrm{P(CB|MM)} \times \mathrm{P(MM)} = 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}5\,,$$

$$\mathrm{P(MB|CB)} = \frac{\mathrm{P(CB|MB)} \times \mathrm{P(MB)}}{\mathrm{P(CB)}} = \frac{0{,}7 \times 0{,}6}{0{,}5} = 0{,}84 \text{ y}$$

$$\mathrm{P(MM|CM)} = \frac{\mathrm{P(CM|MM)} \times \mathrm{P(MM)}}{\mathrm{P(CM)}} = \frac{0{,}8 \times 0{,}4}{0{,}5} = 0{,}64\,.$$

La parte del árbol que corresponde a esta consultora se muestra en la Figura 3.

Consultora OjalaTengaSuerte Para esta consultora sabemos que $\mathrm{P(MB|CB)} = \mathrm{P(MM|CM)} = 0{,}2$. A partir de estos valores podemos calcular $\mathrm{P(CB)} = 1/3 = 0{,}33$ y $\mathrm{P(CM)} = 2/3 = 0{,}67$ resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}
\mathrm{P(CB)} &= \mathrm{P(CB|MB)} \times \mathrm{P(MB)} + \mathrm{P(CB|MM)} \times \mathrm{P(MM)} \\
\mathrm{P(CM)} &= \mathrm{P(CM|MB)} \times \mathrm{P(MB)} + \mathrm{P(CM|MM)} \times \mathrm{P(MM)}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
0{,}6 &= 0{,}2 \times \mathrm{P(MB)} + 0{,}8 \times \mathrm{P(MM)} \\
0{,}4 &= 0{,}8 \times \mathrm{P(MB)} + 0{,}2 \times \mathrm{P(MM)}
\end{aligned}$$

La parte del árbol que corresponde a esta consultora se muestra en la Figura 3.

Juntando todo tenemos el árbol de la Figura 3.

De acuerdo a este árbol no es conveniente contratar ninguno de los dos estudis disponibles.

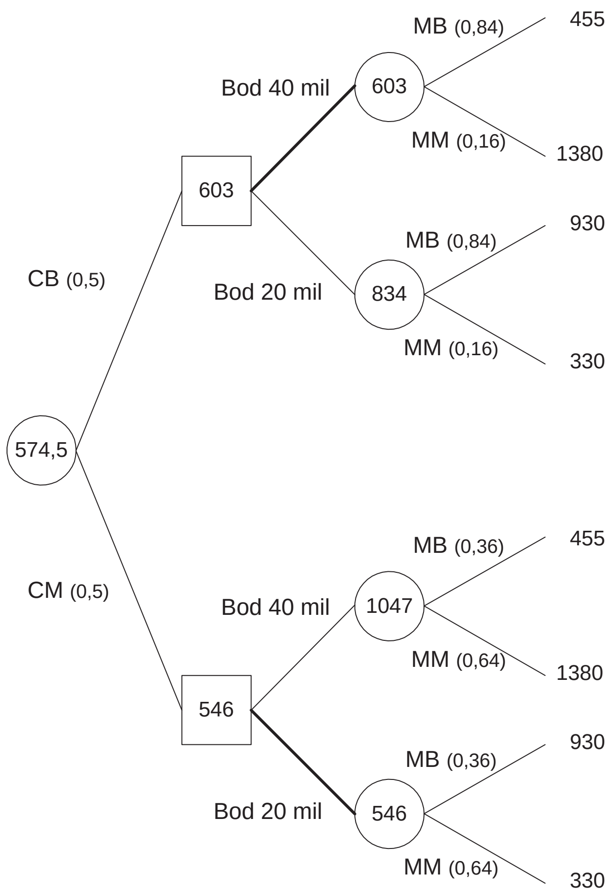

Figura 2: Subárbol correspondiente a la consultora CasiSiempreAcierta.

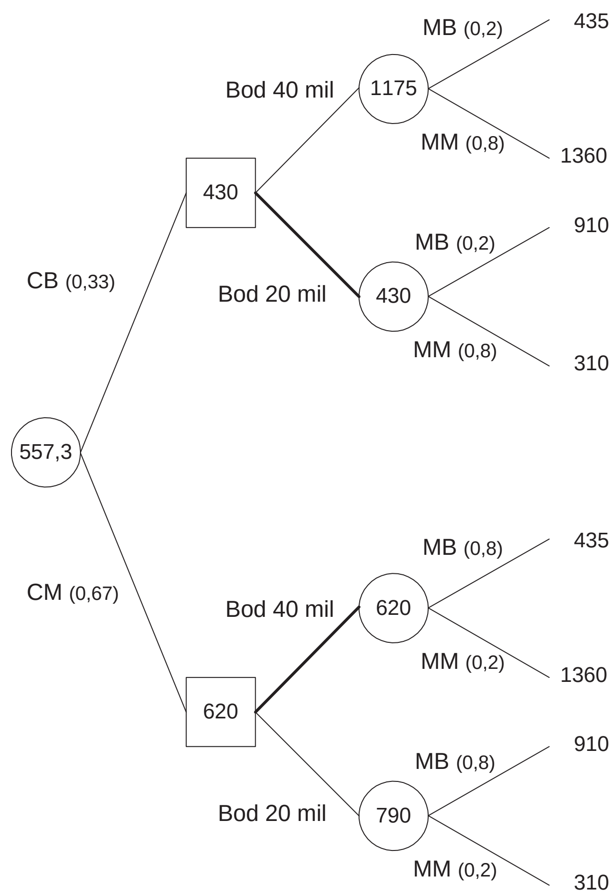

Figura 3: Subárbol correspondiente a la consultora OjalaTengaSuerte

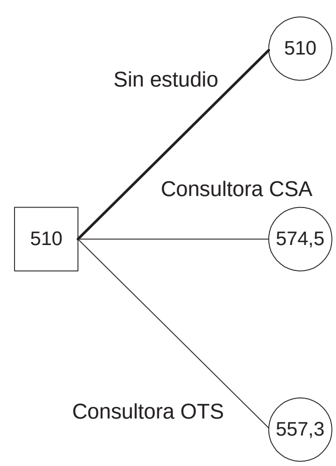

Figura 4: Árbol correspondiente a la parte 3.

Problema 3

Primero, observemos que no es importante decidir cuál de los inspectores es el que realizará cada fiscalización sino cuántas fiscalizaciones son realizadas por cada tipo de inspector cada día.

Un modelo que cumple con lo solicitado es el siguiente:

Etapas

Cada día: $t = 1, \dots, T$.

Variables de estado

- s_t: cantidad de inspectores nuevos que ya están ocupados para el día t (estos son los que comenzaron una fiscalización el día $t-1$;
- p_t: cantidad de inspecciones programadas para el día $t-1$ que no se realizaron y quedaron pendientes para el día t.

Variables de decisión

- e_t: cantidad de fiscalizaciones a ser realizadas en día t por inspectores con experiencia;
- n_t: cantidad de fiscalizaciones a ser realizadas en día t por inspectores nuevos.

Estas variables de decisión deben satisfacer las siguientes condiciones:

- No se programan más fiscalizaciones que inspectores hay disponibles: $0 \leq e_t \leq E$, $0 \leq n_t \leq N - s_t$.
- Las fiscalizaciones pendientes se deben realizar obligatoriamente: $e_t + n_t \geq p_t$.
- Se debe realizar, al menos, el 90 % de las fiscalizaciones programadas para un día determinado: $e_t + n_t - p_t \geq 0{,}9 \times o_t$.

Funciones de recurrencia

Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguientes relaciones:

$$s_{t+1} = n_t \qquad \text{y} \qquad p_{t+1} = o_t - (e_t + n_t - p_t) = o_t - e_t - n_t + p_t\,.$$

Función de beneficio

La función de costos a optimizar es:

$$V_t(s_t, p_t, e_t, n_t) = Ae_t + Bn_t + V^*_{t+1}(s_{t+1}, p_{t+1}) = Ae_t + Bn_t + V^*_{t+1}(n_t, o_t - e_t - n_t + p_t)$$

donde

$$V^*_t(s_t, p_t) = \text{mín}\{V_t(s_t, p_t, e_t, n_t) : 0 \leq e_t \leq E, 0 \leq n_t \leq N - s_t, e_t + n_t \geq p_t, e_t + n_t - p_t \geq 0{,}9 \times o_t\}\,.$$

Condiciones de borde

- $s_1 = 0$;
- $p_1 = 0$;
- $V^*_{T+1}(s_{T+1}, p_{T+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_{T+1} = p_{T+1} = 0\,, \\ +\infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$.