



VIERNES 15 DE ABRIL DEL 2005
CONTROL 1 IN44A

Problema 1

En una bella región al sur de Tumbuctú, se ha desatado una competencia política sin precedentes. A final de este año habrá elecciones para elegir al futuro alcalde de la región. En dicha carrera por la alcaldía participarán sólo dos candidatos, Don King, actual alcalde con casi 10 años en el cargo, y un nuevo político de la región llamado Ron Stein.

Debido a que su popularidad ha disminuído en el último tiempo, Don King que desea ganar a toda costa, le ha pedido a usted asesoramiento para determinar una estrategia de campaña que le ayude a recuperar adeptos. Usted sabe que, para este tipo de casos, las estrategias posibles son sólo dos: la estrategia A y la estrategia B. A su vez, Don King le informa que gracias a sus largos años en la arena política, ha podido determinar que Ron Stein lanzará una campaña con el fin de contrarrestar los efectos de su campaña con una probabilidad q (independiente de cual tipo de campaña haya lanzado King). Debido a que al actual alcalde siempre le ha gustado tener la última palabra, le comenta que en caso que Stein responda a su estrategia inicial, él consideraría la opción de lanzar una segunda campaña siguiendo la estrategia C. Un estudio de las intenciones de voto de la población realizado por consultores de una prestigiosa universidad, ha determinado la probabilidad de que **una** persona, independiente de las demás, vote por King a final de año. Esta probabilidad dependerá, como es de esperar, de las campañas que hayan desarrollado los candidatos durante el período previo a las elecciones. Los valores obtenidos en el estudio se detallan en la siguiente tabla:

Estrategia de campaña inicial de King	Stein responde y King lanza campaña C	Stein responde y King no hace nada	Stein no responde
A	p_1	p_2	p_3
B	p_4	p_5	p_6

Tabla 1: Probabilidad de que **un** elector vote por King.

La región donde será realizada la votación cuenta con un total de N electores inscritos en el registro. De este total, se sabe que N_e son ecologistas y están absolutamente en contra de las campañas políticas. Se sabe además, que en caso que King lance una campaña A, enfocada en el aumento de la industrialización de la zona, todos los ecologistas votarán por el otro candidato. Análogamente, si King lanza la campaña B, de postura más ambientalista, sólo la mitad de los ecologistas tomará la acción de penalización antes mencionada. En este caso, los otros ecologistas se comportan como el resto de los electores.

1. (2 pts.) Considere los siguientes valores numéricos para las probabilidades en la Tabla 1:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0,6	0,7	0,5	0,4	0,6	0,8

Considere además que la probabilidad que Stein responda la campaña inicial de King es $q = 0,7$ y el número total de electores es $N = 1000$ y que $N_e = 100$ de ellos son ecologistas.

Con los datos entregados construya y resuelva un árbol de decisión le permita a King decidir qué estrategias de campaña utilizar para maximizar el número esperado de votos que recibirá en la elección.

Observando lo preocupado que ha estado King con la futura elección, uno de sus asesores le ha comentado sobre la posibilidad de emplear un Test que agrega información sobre la reacción que presentará su adversario ante las campañas A o B que planea el candidato. Se sabe que la probabilidad que el Test prediga un contraataque de Stein dado que este candidato contraatacará es igual a 0,8; mientras que la probabilidad que el Test prediga que no habrá reacción de Stein cuando efectivamente no la habrá es de 0,7. Además, de aplicarse el Test, la opinión pública percibirá la incertidumbre que King tiene sobre el apoyo popular, lo que se traducirá en 100 electores, ninguno de ellos ecologistas, que votarán con seguridad por Stein. También se sabe que la postura de los ecologistas no se verá afectada por el Test.

2. (4 ptos.) Plantee y resuelva un árbol de decisión que le permita a nuestro candidato evaluar si el Test que le propone el asesor es conveniente o no.
3. **Bonus** (0,5 ptos.) Para la situación de la parte 1., encuentre una expresión que le permita determinar cuántos votos espera recibir King en la votación, tomando como parámetros los datos que Ud. estime convenientes. Denote este valor por $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$ donde x_1, x_2, \dots, x_k son los k parámetros utilizados (por ejemplo, si ocupa sólo dos parámetros la expresión será $V(x_1, x_2) = \text{"función de } x_1 \text{ y } x_2\text{"}$).

Problema 2

Parte 1

Un experto tomador de decisiones enfrenta el siguiente juego en Las Vegas. El Casino obtiene un número real de una ruleta electrónica con probabilidad uniformemente distribuida entre 0 y 100. Lo mismo cada jugador. Los números obtenidos por el Casino y los jugadores son independientes. Además, los números son secretos, nadie sabe el número del otro ni el número propio, ni el Casino ni los jugadores.

Cada jugador apuesta \$100 contra el Casino. Si el número del Casino es mayor, el jugador pierde la apuesta pero si el jugador tiene el número mayor gana un monto igual al apostado (\$100) además de recuperar la apuesta.

Hay una máquina que permite comparar cualquier par de números e indica cuál es el mayor. Después de este proceso de comparación, el Casino y los jugadores siguen ignorantes en relación al valor de sus números. Dado que los números son reales, la probabilidad de empatar es nula.

En cada ronda el Casino juega contra 4 jugadores en forma secuencial. Primero el Casino compara su número contra el número del Jugador 1, y colecta la apuesta si gana o paga al jugador si pierde. Luego el Casino se compara con el Jugador 2, para seguir con el Jugador 3 y terminar con el Jugador 4. En este proceso de comparación el Casino utiliza siempre el mismo número que obtuvo de la ruleta electrónica al inicio del juego (el cual es secreto para el Casino y para los jugadores, lo mismo que los números de los jugadores).

Los 4 jugadores observan el resultado de cada comparación que hace el Casino. Es decir, todos los jugadores observan si el Jugador 1 gana o pierde en la comparación con el Casino.

Nuestro experto tomador de decisiones está jugando en la cuarta posición (Jugador 4). Él ha observado que el Casino le ganó al Jugador 1, al Jugador 2 y al Jugador 3. Nuestro experto no tiene otro ingreso que la apuesta en este juego. La función de utilidad de nuestro experto tomador de decisiones es:

$U(x)$ = Función de utilidad del tomador de decisiones, donde x es el ingreso.

$$U(x) = 100x - 0,01x^2$$

1. (2,5 puntos) ¿Cuál es el valor esperado de la apuesta para nuestro experto tomador de decisiones?
2. (1,5 puntos) Antes de realizar la comparación con su número, el Casino le ofrece al experto tomador de decisiones la posibilidad de retirar la apuesta sujeto a un pago del jugador al Casino. ¿Estaría nuestro experto dispuesto a pagar para retirar la apuesta? Justifique su respuesta sin realizar cálculos complejos (sin calculadora). Si su respuesta fuera afirmativa, plantee una ecuación que permita calcular exactamente el valor máximo que el tomador de decisiones estaría dispuesto a pagar para retirar su apuesta (no resuelva).

Parte 2

La compañía **TopOne** esta planeando la estrategia de marketing para el próximo año de sus tres productos estrella. Estos tres productos son de características muy distintas, por lo que se debe hacer una estrategia para cada producto. Dado el tamaño del mercado, se sabe que los gastos en marketing de cada producto son un número entero de millones de dólares. Además, para el próximo año hay un presupuesto de 6 millones y se sabe a priori que se debe gastar al menos US\$ 1 MM en cada producto.

El gerente de operaciones de la compañía, experto en programación dinámica, ha decidido determinar el gasto en marketing necesario para cada producto con el fin de maximizar las ventas totales de la empresa. Para estos efectos, el gerente cuenta con una estimación de las ventas de cada producto, en función del gasto en marketing en dicho producto. Esta información se presenta (en MM US\$) en la siguiente tabla:

Gasto en Marketing	Ventas Producto 1	Ventas Producto 2	Ventas Producto 3
1	7	4	6
2	10	8	9
3	14	11	13
4	17	14	15

Tabla 2: Ventas en función del gasto en marketing, por producto.

1. (2 pts.) Plantee un modelo de programación dinámica determinística para el problema que enfrenta el gerente de la compañía. Resuélvalo en base a la información entregada y obtenga la inversión que maximice las ventas totales.

Problema 3

Una empresa produce un solo producto. Para la producción de una unidad de producto se necesita una unidad de un único insumo. Considere que los productos producidos en una semana, ya están disponibles para la venta durante esa semana. De manera análoga, considere que la materia prima pedida al inicio de una semana está disponible para ser utilizada esa semana.

La empresa cuenta con una cartera de clientes compuesta por C clientes. Cada uno de estos clientes, independiente de los otros y de lo que haya hecho anteriormente, deseará adquirir una unidad del producto fabricado por la empresa en la semana k con probabilidad p_k . Los clientes nunca solicitan más de una unidad por semana. Si un cliente solicita el producto y no hay, la venta se pierde.

Los costos que incurre la empresa son los siguientes:

- costo fijo por poner una orden de materia prima Z ;
- costo unitario, por unidad solicitada de materia prima, M ;
- costo unitario por mantener una unidad de materia prima en inventario, N ;
- costo fijo por producir durante la semana k , F_k ;
- costo unitario de producción durante la semana k , U_k ;
- costo unitario por mantener una unidad de producto en inventario, I ;

El precio unitario de venta del producto es B y está fijo para todo el horizonte de planificación. Las unidades de materia prima sobrantes al final del horizonte de planificación podrán ser vendidas a un distribuidor a un valor S por unidad ($S < M$). Por otro lado, los productos sobrantes serán liquidados a un precio unitario R ($R < B$).

Al inicio del período de planificación se cuenta con Q unidades de producto en inventario y L unidades de materia prima para la producción.

1. (6 ptos.) Construya un modelo de programación dinámica estocástica que permita planificar la producción y adquisición de materia prima, maximizando el beneficio neto esperado de la empresa.