



## Solución Auxiliar 7

Martes 21 de Agosto de 2007

### Problema 1

1. El modelo de programación dinámica estocástica es el siguiente:

- Etapas:

Cada uno de los paraderos,  $k \in \{1, \dots, K\}$

- Estados:

$N_k$  = Número de pasajeros en el bus antes de parar (o no) en el paradero  $k$ .

- Decisión:

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si se detiene en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Variable aleatoria:

$j_k$  = Número de personas que desean subirse en el paradero  $k$ .

$$Y_k = \begin{cases} 1 & \text{si lo detiene un carabinero en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- Recurrencia:

$$N_{k+1} = X_k \cdot \min\{C, N_k + j_k\} + (1 - X_k) \cdot N_k$$

- Función de Beneficios:

La esperanza de las utilidades toma la siguiente forma:

$$V_k^*(N_k) = \max\{V_k(N_k, X_k = 0), V_k(N_k, X_k = 1)\}$$

Donde:

$$V_k(N_k, 1) = -D + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ P_k \cdot \min\{C - N_k, j\} + V_{k+1}^*(\min\{C, N_k + j\}) \right] \cdot S_j$$

y

$$V_k(N_k, 0) = -C_{inf}(1 - S_0) \cdot P_{Multa} + V_{k+1}^*(N_k)$$

- Condiciones de borde:

Comenzamos con el bus vacío:  $N_1 = 0$

En el terminal se recibe recompensa por tener el bus lleno:

$$V_{K+1}^*(N_{K+1}) = \begin{cases} F & \text{si } N_{K+1} = C \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Para esta parte, la función de beneficios tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V_k = & X_k \cdot (-2000 + \\ & 0,1(V_{k+1}^*(N_k) + \\ & 0,4(500 \cdot \min\{30 - N_k, 1\} + V_{k+1}^*(N_{k+1})) + \\ & 0,5(500 \cdot \min\{30 - N_k, 2\} + V_{k+1}^*(N_{k+1}))) + \\ & (1 - X_k) \cdot (-3000 \cdot 0,7 \cdot 0,9 + V_{k+1}^*(N_k)) \end{aligned}$$

Construimos las tablas utilizando esta función de beneficios.

Período 10:

$N_{10}$	0	1	$X_{10}^*$	$V_{10}^*$
30	3110	3000	0	3110
29	-1890	2950	1	2950
28	-1890	1200	1	1200
27	-1890	-1300	1	-1300

Período 9:

$N_9$	0	1	$X_9^*$	$V_9^*$
30	1220	1100	0	1220
29	1060	1544	1	1544
28	-690	1555	1	1555
27	-3190	525	1	525

Período 8:

$N_8$	0	1	$X_8^*$	$V_8^*$
29	-346	-297,6	1	-297,6
28	335	83,1	1	83,1
27	-1365	146,5	1	146,5

Período 7:

$N_7$	0	1	$X_7^*$	$V_7^*$
27	-1743,5	-1400,91	1	-1400,91

La estrategia óptima de detenciones es la siguiente:

- Detenerse en el paradero 7 y 8
- Si se llega con menos de 30 personas al paradero 9 y 10, detenerse. Si el bus esta lleno, seguir de largo hasta el terminal.

## Problema 2

1. Siguiendo los pasos característicos tendremos:

■ **Etapas:** Cada uno de los hoteles.

■ **Variable de estado:**

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ya encontré habitación en algún hotel} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

■ **Variable de decisión:**

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{Si entro a preguntar al hotel } i\text{-ésimo} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

■ **Variable aleatoria:**

$$w_i = \begin{cases} 1 & P_i & \text{Si hay habitación} \\ 0 & 1 - P_i & \text{Si no} \end{cases}$$

■ **Condición de borde:**

$$\begin{aligned} V_k^*(1) &= 0 \\ V_{N+1}^*(0) &= K \end{aligned}$$

■ **Recurrencia:**

$$V_k(0, q_k) = q_k(Q + P_k \cdot S_k + (1 - P_k) \cdot V_{k+1}^*(0)) + (1 - q_k) \cdot (V_{k+1}^*(0) + C_k)$$

Asumiendo  $C_N = 0$ . Entonces:

$$V_k^*(0) = \max_{q \in \{0,1\}} V^*(0, q)$$

2. Resolvemos:

■ **Etapas 4:**

$$V_4^*(0) = 450$$

■ **Etapas 3:**

$$\begin{aligned} V_3^*(0, 1) &= 100 + 0,4 \cdot 150 + 0,6 \cdot 450 = 430 \\ V_3^*(0, 0) &= 450 \end{aligned}$$

Implica que  $q_3^* = 1$  y que  $V_3^*(0) = 430$

■ **Etapas 2:**

$$\begin{aligned} V_2^*(0, 1) &= 100 + 0,6 \cdot 250 + 0,4(100 + 430) = 462 \\ V_2^*(0, 0) &= 100 + 430 = 530 \end{aligned}$$

Implica que  $q_2^* = 1$  y que  $V_2^*(0) = 462$

■ **Etapas 1:**

$$\begin{aligned} V_1^*(0, 1) &= 100 + 0,8 \cdot 500 + 0,2(100 + 462) = 612 \\ V_1^*(0, 0) &= 100 + 462 = 562 \end{aligned}$$

Implica que  $q_1^* = 0$  y que  $V_1^*(0) = 562$

## Problema 3

### 1. MODELO DETERMINÍSTICO

#### Variable de estado:

$S_t$  = años de uso de la máquina disponible al inicio del período  $t$ .

#### Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

#### Función de beneficio:

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f_{t+1}^*(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f_{t+1}^*(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} f_t(S_t, X_t)$$

Donde  $f_t^*(S_t)$  = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período  $t$  hasta el final, es decir, hasta  $T$  si la antigüedad del equipo es  $S_t$ .

#### Condiciones de borde y función objetivo

$$\begin{aligned} f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f_1^* &= \min_{X_1=0, 1, 2, \dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f_2^*(X_1 + 1) \right\} \end{aligned}$$

### 2. MODELO ESTOCÁSTICO

#### Variable de estado

$S_t$  = años de uso de la máquina disponible al inicio del período  $t$ .

#### Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

### Variable aleatoria

$$w_t(S_t) = \begin{cases} 1 & \text{máquina buena al final del período } t, \text{ si es de antigüedad } S_t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde la probabilidad  $P[w_t(S_t) = 1] = (1 - q_{S_t+1})$

### Función de beneficio:

$$E[f_t(S_t, X_t)] = \begin{cases} C_{S_t} + (1 - q_{S_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(S_t + 1) + q_{S_t+1} \cdot (1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0)) \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + (1 - q_{X_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(X_t + 1) + q_{X_t+1} \cdot (1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0)) \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} E[f_t(S_t, X_t)]$$

Donde  $f_t^*(S_t)$  = costo mínimo esperado de la operación de la máquina desde el inicio del período  $t$  hasta el final, es decir, hasta  $T$  si la antigüedad del equipo es  $S_t$ .

### Condiciones de borde y función objetivo

Hay que notar que el valor residual ya no es tan claro, porque si la máquina se hecha a perder justo al final del último período NO necesitamos reemplazarla, así se tendrá:

$$E[f_T(S_T, X_T)] = \begin{cases} C_{S_T} + (1 - q_{S_T+1}) \cdot -V_{S_T+1} \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_T} + I_{X_T} - V_{S_T} + (1 - q_{X_T+1}) \cdot -V_{X_T+1} \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_1 = \min_{X_1=0,1,2,\dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + \mathbb{E}_{w_1} [f_2^*(X_1 + 1)] \right\}$$

Dudas y/o errores:  
Jaime Gacitúa C.  
jgacitua@ing.uchile.cl