UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE
INGENIERIA INDUSTRIAL

IN44A: Investigación Operativa
Prof. : Pablo Rey, Rafael Epstein
Aux. : Jaime Gacitúa, Daniel Wilson, Rodrigo Wolf
Coord. : Christian Araya

Solución Auxiliar Martes 14 Agosto

Programación Dinámica

Problema 1

1. En este punto se deben incluir argumentos como: Existe un conjunto de decisiones interrelacionadas, si se modelan adecuadamente las etapas se tendrá que la decisión para una de ellas es independiente de decisiones pasadas y sólo dependerá de variables de estado, etc.

2. De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

   - **Etapas**:
     Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
   - **Variables de estado**:
     S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
   - **Variables de decisión**:
     X_m, el número de botones asignados al barrio m.
   - **Recurrencia de estados**:

     $$S_{m+1} = S_m - X_m$$

   - **Función de beneficios**:

     $$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

     Donde:

     $$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

   - **Condiciones de borde**:

     $$V^*_{M+1}(\%) = 0$$
     $$S_1 = K$$

3. Al igual que en el punto anterior se tendrá que:

   - **Etapas**:
     Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
   - **Variables de estado**:
     S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
   - **Variables de decisión**:
     X_m, el número de botones asignados al barrio m.
   - **Recurrencia de estados**:

     $$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios**:

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) - r_m \cdot \text{máx}\{0, X_m - U_m\} - t_m \cdot \text{máx}\{0, L_m - X_m\} + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde**:

$$\begin{aligned} V^*_{M+1}(\%) &= 0 \\ S_1 &= K \end{aligned}$$

4. De acuerdo al punto anterior y a los datos provistos en el enunciado tendremos que:

Para **m=3**:

S_3	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$x_3=5$	V^*_3	x^*_3
0	-40	-	-	-	-	-	-40	0
1	-40	30	-	-	-	-	30	1
2	-40	30	70	-	-	-	70	2
3	-40	30	70	80	-	-	80	3
4	-40	30	70	80	80	-	80	4
5	-40	30	70	80	80	90	90	5

Para **m=2**:

S_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	V^*_2	x^*_2
0	-70	-	-	-	-	-	-70	0
1	0	-35	-	-	-	-	0	0
2	40	35	5	-	-	-	40	0
3	50	75	75	35	-	-	75	1,2
4	50	85	115	105	55	-	115	2
5	60	85	135	145	125	80	145	3

Para **m=1**:

S_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	V^*_1	x^*_1
5	125	150	145	130	95	30	150	1

Entonces la estrategia es la siguiente:

- Barrio 1: 1 Botones
- Barrio 2: 2 Botones
- Barrio 3: 2 Botones

Esta estrategia consigue un total de 150 votos.

Problema 2

1. El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

2. Modelo de Programación Dinámica

   Etapas:

   - $k = 1, \dots K$ c/u de los meses.

   Variable de estado:

   - S_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k-1$ al k.

   Variable de decisión:

   - X_k Número aviones a fabricar el mes k.

   Recursión:

   - $S_{k+1} = S_k + X_k - D_k$

   Función objetivo:

   - Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato) solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$\begin{aligned} V_k^\star(S_k) &= \min_{X_k} \left[C_{X_k,k} + h \cdot S_k + V_{k+1}^\star(S_{k+1}) \right] \\ \textbf{s.a.} \quad & X_k \geq \max\{0, D_k - S_k\} \\ & X_k \leq M \chi_{\{D_k > S_k\}} \end{aligned}$$

   Notar que el costo de bodegaje desde el período $k-1$ al k es contabilizado en el período k. Además la primera restricción sobre la variable de decisión impide que algún mes no se cumpla el contrato de entrega de los aviones. La segunda restricción impide que se produzcan aviones si quedan en bodega, salvo para satisfacer la demanda del período en cuestión (χ es la función indicatriz y M es un número grande).

   Condiciones de Borde:

   - $S_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
   - $S_{K+1} = 0$ o $D_K = X_K + S_K$ Al final no deben sobrar aviones.
   - $V_{K+1} = 0$ Valor residual.

3. Ahora debemos agregar una nueva variable que nos indique cuantas aviones se han fabricado hasta un mes en particular.

Modelo de Programación Dinámica Modificado

Estados:

- $k = 1, \dots K$ c/u de los meses.

Variable de estado:

- S_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k-1$ al k.
- A_k Cantidad de aviones fabricados hasta el comienzo del mes k.

Variable de decisión:

- X_k Número aviones a fabricar el mes k.

Recursión:

- $S_{k+1} = S_k + X_k - D_k$
- $A_{k+1} = A_k + X_k$

Función objetivo:

- Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato) solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$\begin{aligned} V_k^\star(S_k, A_k) &= \min_{X_k} \left[C_{X_k,k} + \sum_{j=1}^{X_k} R(A_k + j, k) + h \cdot S_k + V_{k+1}^\star(S_{k+1}, A_{k+1}) \right] \\ \textbf{s.a.} \quad & X_k \geq \max\{0, D_k - S_k\} \\ & X_k \leq M \chi_{\{D_k > S_k\}} \end{aligned}$$

Condiciones de Borde:

- $S_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
- $A_1 = 0$ Al comienzo no se han fabricado aviones.
- $S_{K+1} = 0$ o $D_K = X_K + S_K$ o $A_{K+1} = \sum_{k=1}^{K} D_k$ Al final no deben sobrar aviones.
- $V_{K+1} = 0$ Valor residual.

Problema 3

- **Etapas**:

  Cada uno de los períodos del horizonte de evaluación, t=1,...,T

- **Variables de Estado**:

  S_t = Stock en tienda en período t.
  B_t = Stock en bodega central en periodo t.
  L_t = Cantidad de piscinas enviadas a la tienda, en el período anterior.

- **Variable de Decisión**:

  e_t = Cantidad de piscinas a enviar de bodega central a tienda en periodo t.

- **Variable Aleatoria**:

  D_t = Demanda de piscinas en la tienda en periodo t.

  Dado que en cada uno de los períodos del horizonte la tienda tiene R clientes potenciales, cada uno de los cuales demanda 1 unidad del producto con probabilidad q_t, en el período t, se tiene que:

$$P[D_t = k] = \binom{R_t}{k} q_t^k (1 - q_t)^{R_t - k}$$

- **Recurrencias**:

$$S_{t+1} = \text{máx}\{S_t + e_t - D_t, 0\}$$

$$B_{t+1} = B_t - e_t$$

$$L_{t+1} = e_t$$

- **Función de Beneficio**:

$$E_{D_t}[V_t(B_t, S_t, L_t, e_t)] = -c_t(e_t) - A_t \cdot |e_t - L_t| + \sum_{k=0}^{\infty} P[D_t = k] \cdot [U_{t,k} + V_{t+1}^*(B_t - e_t, \text{máx}\{S_t + e_t - k, 0\}, e_t)]$$

Donde:

$$U_{t,k} = P \cdot \text{mín}\{S_t + e_t, k\}]$$

$$V_t^*(B_t, S_t, L_t) = \underset{e_t \leq B_t, S_t + e_t \leq K}{\text{máx}} \{E_{D_t}[V_t(B_t, S_t, L_t, e_t)]\}$$

- **Condiciones de Borde**:

$$V_{T+1}(B_{T+1}, S_{T+1}, L_{T+1}) = S \cdot S_{T+1}$$
$$B_1 = C$$
$$L_1 = e_0$$
$$S_1 = H$$

Problema 4

1. El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

   - **Etapas**:
     - Cada uno de los meses del horizonte de planificación).
   - **Variables de estado**:

   $$S_i = \text{Número de productos disponibles al inicio del mes i}$$

   $$\hat{S}_i = \text{Número de productos que llegaran el proximo més debido a atraso de ordenes}$$

   - **Variables de decisión**:

   $$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ordeno productos para el próximo mes} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

   $$x_i = \text{Número de productos que ordeno para el próximo mes}$$

   - **Variable aleatoria**:

   $$p = P[\text{Una orden se retrase un mes}]$$

   $$q = P[\text{Un cliente demande una unidad de producto}]$$

   - **Función de beneficio acumulado (incorpora recursión)**:
     - Etapa T+1:

   $$V_{T+1}^{\star}(S_{T+1}, \hat{S}_{T+1}) = 0$$

- Etapa i:

$$\begin{aligned} V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i) \quad = \quad & \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} \Big[P \cdot \text{mín}\{S_i, n\} - i \cdot \text{máx}\{n - S_i, 0\} \\ & + (1-p) \cdot [V^*_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + x_i + \hat{S}_i\}, 0)] \\ & + p \cdot [V^*_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + \hat{S}_i\}, X_i)] \Big] \\ & - K \cdot y_i - c \cdot x_i \end{aligned}$$

Donde:

$$V^\star_i(S_i, \hat{S}_i) = \max_{0 \leq x_i \leq L \cdot y_i} [V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i)]$$

- Condiciones de borde:

$$S_1 = S$$
$$\hat{S}_1 = 0$$