UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE
INGENIERIA INDUSTRIAL

IN44A: Investigación Operativa
Prof. : Pablo Rey, Rafael Epstein
Aux. : Jaime Gacitúa, Daniel Wilson, Rodrigo Wolf
Coord. : Christian Araya

Auxiliar Martes 14 Agosto

Programación Dinámica

Problema 1

En una popular comuna el alcalde está bastante preocupado por la seguridad ciudadana, por lo que ha decidido implementar un curioso sistema de botones de pánico, a través de los cuales la amedrentada población podrá pedir ayuda en caso de emergencia.

Después de grandes esfuerzos por conseguir presupuesto, el alcalde cuenta con un capital que le permite instalar un máximo de K botones, los cuales debe distribuir en los M barrios de su comuna. (con $K > M$).

Según el experimentado equipo de asesores del edil, que ya piensan en la reelección, si en el barrio m se instalan k botones, el alcalde ganará $P_m(k)$ votos adicionales.

Suponga que es contratado para determinar la asignación que maximiza la cantidad de votos que conseguirá el alcalde en la próxima elección, producto de su campaña de seguridad ciudadana.

1. ¿Por qué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?.
2. Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables de decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

Suponga ahora que si en un barrio m, se instalan más de U_m botones, la oposición al alcalde lo acusará públicamente de populista y derrochador. Esto implica una pérdida de r_m votos por cada botón por sobre U_m, instalado en esta zona.

Por otra parte, si en el barrio m se asignan menos de L_m aparatos de emergencia, la junta de vecinos del sector también iniciará una campaña de desprestigio que implica la pérdida de t_m sufragios por cada botón por debajo de L_m.

1. Modele el nuevo escenario, usando programación dinámica determinística.
2. Suponga que $M = 3$ y $K = 5$. Además se sabe que $L_1 = L_2 = L_3 = 2$ y $U_1 = U_2 = U_3 = 3$ y se cuenta con estimaciones de los votos que obtendrá el alcalde en cada barrio, en función del número de botones que instale, la que se resume en la siguiente tabla. Con esta información y usando el modelo planteado en la parte (c), encuentre la asignación óptima de botones.

N° Botones de pánico	Barrio 1	Barrio 2	Barrio 3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130
r	10	15	20
t	10	15	20

Problema 2

La empresa fabricante de aviones POING, lo ha contratado a ud. como gerente de producción. La compañía, actualmente tiene compromisos de entregar d_k aviones el mes k ($K \in \{1, ..., K\}$).

La planta tiene capacidad para fabricar en un mes, el número de aviones que convenga. Además, puede guardar aeronaves para satisfacer los compromisos de meses siguientes. Guardar un avión durante un mes, tiene un costo de h u.m. Por otro lado, no se incurre en ningún gasto de inventario si un producto terminado es fabricado y entregado en el mismo mes. Suponga que el avión se entrega siempre al final de cada mes.

Al comienzo de este período de K meses la planta no tiene aviones en inventario y al final tampoco debe tenerlos. Como regla de operación la compañía no fabrica aviones si en bodega tiene unidades suficientes para satisafacer la demanda del período en curso.

El costo total de fabricar i aviones en el mes k es C_{ik}. El problema al que se ve enfrentado ud., como gerente de la compañía es determinar cuánto se debe fabricar en cada mes, de manera de minimizar los costos de fabricación y de inventario, cumpliendo con los compromisos de entrega.

Para ello, responda las siguientes preguntas.

1. (0.5 pts) ¿Porqué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?
2. (2.0 pts) Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables decisión, variables de estado y funciones de beneficio.
3. (1.5 pts)Suponga ahora que el dueño de la compañía desea incentivar a sus trabajadores. Para esto entregará un premio (que se distribuirá entre todos los trabajadores) cada vez que un nuevo avión es terminado. Este premio dependerá del número total de aviones producidos hasta el momento y del mes en el cual se fabrica. Este premio tiene un valor de $R(n, k)$ si el $n-$ésimo avión es fabricado en el mes k.

   Reformule el modelo de la parte 2 para esta nueva situación.

Problema 3

Una tienda ha importado C unidades de piscinas, las cuales espera vender durante la temporada de Verano. Al comenzar la temporada, que dura T semanas, las C unidades están almacenadas en la **bodega central** que se encuentra en las afueras de la ciudad.

Al comienzo de cada semana salen camiones a dejar mercadería a la tienda y el product manager a cargo de las piscinas puede enviar en ellos productos. No es posible devolver productos desde la tienda a la **bodega central**. Al final de cada semana, la tienda informa al product manager el número de piscinas vendidas (y por tanto la cantidad que quedó en stock para la semana siguiente). Se sabe que inicialmente se cuenta con un inventario de H productos en la tienda y que el envío del mes 0 fue e_0.

En el período t ($t = 1....T$) del horizonte, la tienda tiene R_t clientes potenciales, cada uno de los cuales de manera independiente demandará **1 unidad** del producto con probabilidad q_t.

El precio de venta de las piscinas es P. Al terminar la temporada, las unidades que hayan quedado en el **stock de la tienda** pueden ser vendidas a una liquidadora a un precio $S < P$.

El costo de transporte desde la **bodega central** a la tienda en la semana t tiene dos componentes: Primero, se incurre en un costo de $c_t(e_t)$ si se envían e_t unidades en la semana t. Segundo, si el envío en la semana $t-1$ es e_{t-1} y el envío en el mes t es e_t, entonces se incurrirá durante la semana t en un costo de suavizamiento o atenuación igual a $A_t \cdot |e_t - e_{t-1}|$.

Por simplicidad suponga que no hay restricciones de capacidad en los camiones y que el stock máximo que se puede mantener en la **tienda** es de K unidades del producto. Suponga también que no existen costos por mantener el producto en bodega y que los envíos a la tienda son instantáneos.

Formule el problema de programación dinámica estocástica que debe resolver el product manager a cargo de las piscinas para decidir cuantas unidades enviar a la tienda al comienzo de cada semana.

Problema 4

Considere una tienda que cada mes debe decidir cuanto ordenar de un determinado producto. El costo de cada unidad de producto es $\$c$ y existe un costo fijo de poner una orden igual a $\$K$. Se sabe que en general, el tiempo en que se demora en llegar una orden es de 1 mes (lo que se ordena 1 mes estará disponible para el mes siguiente), pero existe una probabilidad p que la orden se atrase y demore 2 meses en llegar. Una orden nunca demora más de 2 meses en llegar.

Actualmente la tienda tiene N clientes, cada uno de los cuales demandará una unidad de producto en un mes con una probabilidad q. El precio de venta es $\$P$ ($P > c$). Además, si llega un cliente y no hay unidades en stock se incurre en un costo $\$i$ por cada uno de ellos.

Por otra parte, la bodega en que se almacena el producto es de capacidad limitada y sólo permite guardar L unidades, con $L \geq N$ (todas las unidades por sobre esta capacidad que intente almacenar serán dañadas perdiendo completamente su valor).

El dueño de la tienda actualmente cuenta con S unidades en la bodega y está interesado en contar con un sistema que le permita, mes a mes, decidir cuánto producto ordenar con el fin de maximizar sus utilidades para los próximos T períodos, fecha en que cerrará su negocio y las unidades de producto que sobren no tendrán valor comercial.

1. Formule el modelo de programación dinámica que permitiría apoyar las decisiones del dueño de la tienda. Escriba explícitamente las expresiones de los valores esperados que puedan aparecer en este modelo.