



## Solución Auxiliar 2

Miercoles 25 de Julio de 2007

### Problema 1

1. a) Sean  $X_i$  v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro  $\lambda$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Encontrando una expresión equivalente a que el máximo sea menor que  $t$  y usando la independencia de las v.a. se tiene que:

$$\begin{aligned} P[X = \max\{X_1, \dots, X_n\} < t] &= (P[X_1 < t] \cdot P[X_2 < t] \cdots P[X_n < t]) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^n \end{aligned}$$

- b) Para encontrar la función de densidad, simplemente derivamos la función de distribución acumulada encontrada en la parte anterior:

$$f_{\max(X_1, \dots, X_n)}(t) = n(\lambda e^{-\lambda t}) (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}$$

- c) El tiempo en que la patrulla llega al cajero si distribuye exponencialmente con parámetro  $\mu$ , por lo tanto dado  $t \geq 0$ :

$$P(T_{pat} < t) = 1 - e^{-\mu t}$$

- d) Necesitamos encontrar la probabilidad de que la patrulla demore menos que el último de los asaltantes. Buscamos la probabilidad de que una v.a. exponencial de parámetro  $\mu$  sea menor que el máximo de  $n$  v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro  $\lambda$ . De las partes anteriores se concluye:

$$\begin{aligned} P[T_{pat} < \max(X_1, \dots, X_n) | n \text{ secuaces asisten a reunión}] &= \int_0^\infty \left( \int_0^t \mu e^{-\mu y} dy \right) f_{\max(X_1, \dots, X_n)}(t) dt \\ &= \int_0^\infty [1 - e^{-\mu t}] \cdot \left[ n(\lambda e^{-\lambda t}) (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} \right] dt \end{aligned}$$

2. Debemos calcular la probabilidad de que una v.a. exponencial de parámetro  $\mu$  sea menor que el mínimo de  $n$  v.a. exponenciales i.i.d. de parámetro  $\lambda$ . Utilizando un resultado conocido:

$$P[T_{pat} < \min(X_1, \dots, X_n) | n \text{ secuaces asisten a reunión}] = \frac{\mu}{\mu + n\lambda}$$

3. Notemos que el número  $n$  de secuaces que llega a la reunión se distribuye según una binomial de parámetros  $(n, p)$ .

En esta parte nos piden la utilidad esperada de la patrulla como expresión general. Condicionaremos según el número de secuaces que llegan a la reunión matinal:

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidades}] &= \sum_{n=1}^M E[\text{Utilidades} | \text{llegan } n \text{ secuaces}] \cdot P(\text{llegan } n \text{ secuaces}) \\ &= \sum_{n=1}^M [P_2 \cdot B + P_1 \cdot R - (1 - P_1) \cdot C] \left[ \binom{M}{n} p^n (1-p)^{M-n} \right] \end{aligned}$$

## Problema 2

1. El tiempo que transcurre desde que empieza la campaña hasta que un votante recibe el folleto de un candidato dado, son variables aleatorias exponenciales de parámetro  $\lambda_T$  y  $\lambda_L$ , respectivamente. Luego para conocer la distribución del tiempo que transcurre hasta que recibe el primero de los folletos, debemos conocer la distribución del mínimo de 2 exponenciales. Entonces, dado que la distribución del mínimo entre 2 exponenciales es una exponencial de la suma de las tasas, se tiene que el tiempo pedido sigue una  $EXP(\lambda_T + \lambda_L)$ .

Por otro lado la probabilidad de que reciba primero el folleto de Tribellín queda determinado por la competencia entre estas mismas dos variables exponenciales. Es decir:

$$P(T1) = P(\text{Tpo. de entrega de Tribellín} < \text{Tpo. de entrega de Labím}) = \frac{\lambda_T}{\lambda_T + \lambda_L}$$

2. La probabilidad de que un habitante es particular vote por Tribellín, depende del orden en que este votante recibió los folletos informativos. Por esto para calcular  $p_t$  se debe condicionar sobre dicho evento. Sean los siguientes sucesos:

VT = Votar por Tribellín

T1 = Votante recibió primero el folleto de Tribellín

L1 = Votante recibió primero el folleto de Labím

Luego la probabilidad pedida es:

$$P(VT) = P(VT|T1) \cdot P(T1) + P(VT|L1) \cdot P(L1)$$

Del enunciado se sabe que:

$$P(VT|T1) = q_1$$

$$P(VT|L1) = q_2$$

Además el tiempo que transcurre desde que empieza la campaña hasta que un votante recibe el folleto de un candidato dado, son variables aleatorias exponenciales de parámetro  $\lambda_T$  y  $\lambda_L$ , respectivamente. Es por esto, que la probabilidad de que reciba primero el de Tribellín queda determinado por la competencia entre estas dos variables exponenciales. Es decir:

$$P(T1) = P(\text{Tpo. de entrega de Tribellín} < \text{Tpo. de entrega de Labím}) = \frac{\lambda_T}{\lambda_T + \lambda_L}$$

De lo anterior:

$$P(L1) = 1 - P(T1) = \frac{\lambda_L}{\lambda_T + \lambda_L}$$

Finalmente se tiene que:

$$p_t = P(VT) = q_1 \cdot \frac{\lambda_T}{\lambda_T + \lambda_L} + q_2 \cdot \frac{\lambda_L}{\lambda_T + \lambda_L} = \frac{1}{\lambda_T + \lambda_L} \cdot (q_1 \cdot \lambda_T + q_2 \cdot \lambda_L)$$

3. La cantidad de votos ( $X$ ) que recibirá Tribellín sigue una distribución Binomial de parámetros  $N$  y  $p_t$ , es decir:

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p_t^k (1 - p_t)^{N-k}$$

donde  $p_t$  es la probabilidad calculada en la parte anterior. Además la esperanza de una variable aleatoria Binomial de parámetros  $N$  y  $p$  está dado por  $N \cdot p$ , por lo tanto:

$$E(X) = N \cdot p_t$$

4. Dado que la cantidad de votantes ( $N$ ) es un número impar, la cantidad de votos suficiente para ganar la elección es  $\frac{N+1}{2}$ . Dado lo anterior y la probabilidad calculada en la parte 2, se tiene que:

$$P(\text{ganar}) = \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^N P(X=k) = \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^N \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

$$P(\text{perder}) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

5. Para calcular la probabilidad de que Tribellín gane por más de  $m$  votos definimos las siguientes variables:

$X_T$ : Número de votos para Tribellín.

$X_L$ : Número de votos para Labím.

Básicamente estamos buscando  $P(X_T - X_L \geq m)$ , pero debemos tomar en cuenta que  $X_T + X_L = N$ . Reemplazamos y desarrollamos.

$$P(X_T - X_L \geq m) = P\left(X_T \geq \frac{N+m}{2}\right) \quad (1)$$

$$= \sum_{k=\lceil \frac{N+m}{2} \rceil}^N \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k} \quad (2)$$

El cajón superior aparece porque  $\frac{N+m}{2}$  puede no ser entero.

La probabilidad que Labím tenga más del doble de los votos que Tribellín está representada por  $P(2 \cdot X_T \leq X_L)$ . Nos apoyamos en  $X_T + X_L = N$  para resolver:

$$P(2 \cdot X_T \leq X_L) = P\left(X_T \leq \frac{N}{3}\right) \quad (3)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k} \quad (4)$$

El cajón inferior aparece porque  $\frac{N}{3}$  puede no ser entero.

6. El valor esperado de los beneficios para el comando de Tribellín está dado por:

$$E[\text{Utilidades}] = E[\text{U(Ganar)}] - E[\text{U(Perder)}] - E[\text{Costo Folletos}]$$

Dilucidemos cada esperanza por separado:

■

$$E[\text{U(Ganar)}] = W_1 \cdot P(\text{Ganar}) + W_2 \cdot P(\text{Ganar por mas de } m \text{ votos})$$

Reemplazando por los resultados obtenidos:

$$E[\text{U(Ganar)}] = W_1 \cdot \sum_{k=\frac{N+1}{2}}^N \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k} + W_2 \cdot \sum_{k=\lceil \frac{N+m}{2} \rceil}^N \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

- Análogamente para la esperanza utilidad de perder, se tiene que:

$$E[U(\text{Perder})] = S_1 \cdot P(\text{Perder}) + S_2 \cdot P(\text{Labim obtiene más del doble de votos})$$

Reemplazando:

$$E[U(\text{Perder})] = S_1 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k} + S_2 \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} \binom{N}{k} p_t^k (1-p_t)^{N-k}$$

- Los costos de la publicidad siguen una distribución uniforme de parámetro (a,b), por lo tanto el costo esperado en folletos es

$$E[\text{Costo Folletos}] = \frac{a+b}{2}$$

Dudas y/o errores:

Jaime Gacitúa C.

jpgacitua@ing.uchile.cl