

Auxiliar N°4 Árboles de Decisión

Problema 1

Una deportista, pocos días antes de un importante campeonato, ha comenzado a sentir algunas molestias en su espalda. Su médico le explica que mucha gente siente dichas molestias, y que muchas veces (una fracción p de los casos) no significan nada. Sin embargo hay ocasiones (una fracción $(1-p)$ de los afectados) en que corresponden a un serio problema en el sistema nervioso. ($0 < p < 1$).

Nuestra deportista podría someterse a un tratamiento preventivo, el cual, tenga o no el problema, la dejará sana. Sin embargo para realizar el tratamiento tendría que abstenerse de participar del campeonato. A esta alternativa ella le asigna una utilidad de 0 (la cual considera el disgusto por no participar del campeonato, el costo del tratamiento, etc.).

Alternativamente ella podría competir en el campeonato. El riesgo de ello radica en que, si sus molestias son efectivamente síntoma de un problema en el sistema nervioso, al terminar el campeonato estará mucho peor, y deberá realizar un tratamiento más prolongado, absteniéndose de participar en muchos otros torneos. Esa situación le reportaría una utilidad de -5000 . Por otro lado, si sus molestias no significan nada, para el final del campeonato se habrán desvanecido, y el haber participado le reporta una utilidad esperada de 1000 .

El objetivo de nuestra deportista es maximizar su utilidad esperada.

1. Modele el problema que enfrenta esta deportista mediante un árbol de decisión. Indique la decisión óptima y la utilidad esperada, como función de p , $B_0(p)$.

Problema 2

Suponga que tiene 3 naipes de idéntica forma, pero diferentes colores. La primera carta es roja por ambos lados, la segunda tiene un lado rojo y el otro negro y la tercera es negra por ambas caras. Se mezclan las cartas en una bolsa y se extrae aleatoriamente una, pudiéndose observar el color de sólo uno de sus lados. Si la cara que observamos es roja, ¿cuál es la probabilidad que el otro lado sea negro?

Problema 3

Una empresa que produce piezas puede ser clasificada como clase A (empresa *en control*, es decir, produce un 2% de piezas defectuosas) o clase B (empresa *fuera de control*, con un 20% de piezas defectuosas). Históricamente se sabe que la probabilidad de que una empresa esté en clase A es de un 90%.

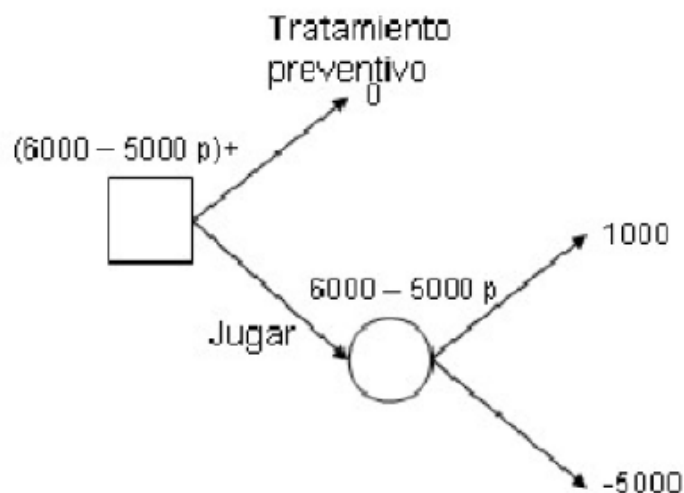
Por otro lado continuar con el proceso productivo de la empresa cuando está fuera de control representa un costo de 400 [UM], mientras que detener el proceso cuando está en control representa un costo de 120 [UM].

Existe la posibilidad de tomar una muestra aleatoria de 1 pieza, a un costo de 5 [UM], que permite determinar la calidad de dicha pieza, es decir, si es defectuosa o está correctamente fabricada.

1. Construya un árbol de decisión que permita decidir si se debe continuar con la producción, o si ésta se debe detener, además de determinar si es conveniente realizar el muestreo aleatorio para apoyar la decisión.
2. Suponga que realizar el muestreo aleatorio para un tamaño de 2 piezas tiene un costo de 8 [UM] ¿Es conveniente utilizar este nuevo muestreo para apoyar la decisión de continuar o detener la producción?
3. ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?

Solución

Problema 1



La opción del tratamiento preventivo entrega una ganancia segura de 0(u.m.). Por otro lado la opción de jugar entrega una utilidad esperada de $6000p - 5000(u.m.)$. Es así como la estrategia óptima será la que reporte una mayor utilidad (esperada). Entonces se tendrá que:

$$B_0(p) = (6000p - 5000)^+$$

Problema 2

Sean:

R = Veo primero un lado rojo

RR = La carta es roja-roja

NR = La carta es roja-negra

NN = La carta es negra-negra

Dada esta notación se pide:

$$\begin{aligned}
 P[NR|R] &= \frac{P[R|NR] \cdot P[NR]}{P[R]} \\
 &= \frac{P[R|NR] \cdot P[NR]}{P[R|NN] \cdot P[NN] + P[R|NR] \cdot P[NR] + P[R|RR] \cdot P[RR]} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

Problema 3

a) Para desarrollar el problema necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

- T+ = Test indica pieza mala.
- T- = Test indica pieza buena.
- P = Parar de producir.
- NP = continuar la producción.
- A = Empresa tipo A.
- B = Empresa tipo B.

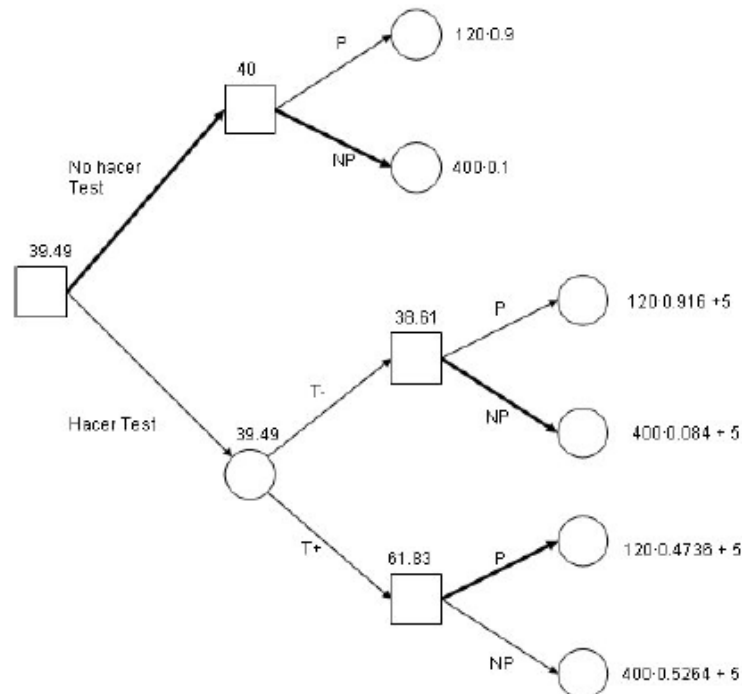
De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned}
 P[T+|A] &= 0,02 = 1 - P[T-|A] \\
 P[T+|B] &= 0,2 = 1 - P[T-|B] \\
 P[T+] &= P[T+|A] \cdot P[A] + P[T+|B] \cdot P[B] \\
 &= 0,02 \cdot 0,9 + 0,2 \cdot 0,1 \\
 &= 0,038 \\
 \Rightarrow P[T-] &= 0,962
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[A|T+] &= \frac{P[T+|A]P[A]}{P[T+]} = \frac{0,018}{0,038} = 0,4736 = 1 - P[B|T+] \\
 P[A|T-] &= \frac{P[T-|A]P[A]}{P[T-]} = \frac{0,882}{0,962} = 0,916 = 1 - P[B|T-]
 \end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.

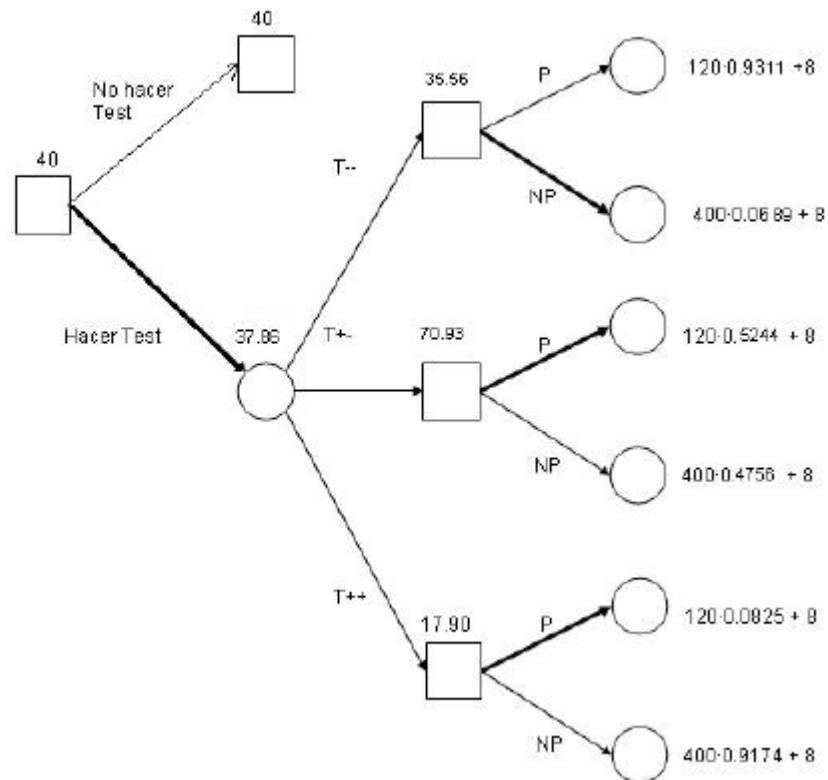


Noten que conviene realizar el test.

b) La idea es exactamente la misma, solamente que debemos calcular las siguientes probabilidades:

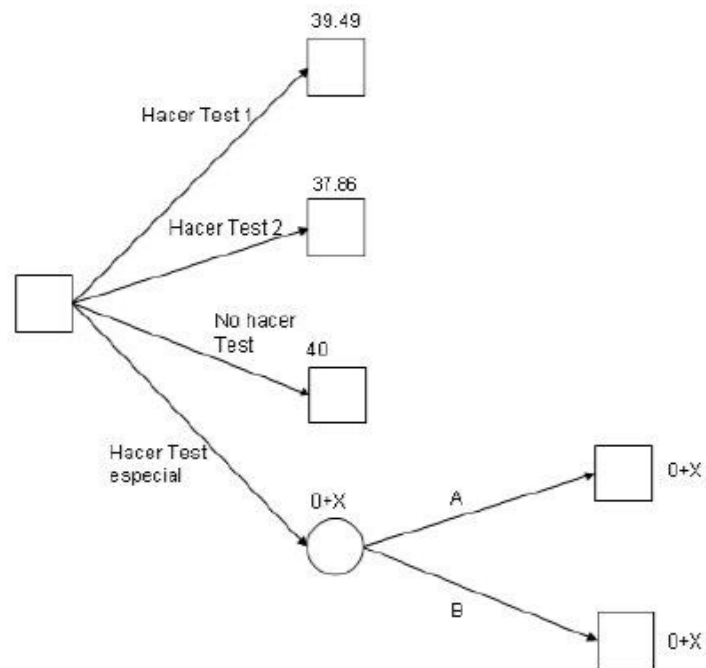
$$\begin{aligned}
P[T++] &= 0,0004 \cdot 0,9 + 0,04 \cdot 0,1 = 0,00436 \\
P[T--] &= 0,92836 \\
P[T+-] &= 0,06728 \\
P[A|T++] &= \frac{0,0004 \cdot 0,9}{0,00436} = 0,0825 == 1 - P[B|T++] \\
P[A|T--] &= \frac{0,978 \cdot 0,9}{0,92836} = 0,9311 == 1 - P[B|T--] \\
P[A|T+-] &= \frac{(2 \cdot 0,98 \cdot 0,02) \cdot 0,9}{0,0678} = 0,5244 = 1 - P[B|T+-]
\end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.



Por lo tanto hacemos el test, ya que el costo esperado de hacerlo es menor al de no hacerlo

c) Para ver cual es el valor de la información perfecta considere un test que clasifica correctamente a las empresas y cuyo valor es X. El árbol de decisión asociado se muestra en la figura.



Entonces el valor de este test especial será 37.86.

En otras palabras vamos a estar dispuestos a pagar hasta 37,86 por la información