



## Auxiliar 3: Repaso de Probabilidades

Martes 31 de Julio de 2007

### Problema 1: CTP 1 Primavera 2006

Oscar Saavedra es un apostador empedernido, el domingo pasado le comentó a usted que tenía 100.000[um] para invertir en tres juegos de azar, pero no se decidía en cual. Le pidió a usted que le ayudara a resolver esta disyuntiva, calculando en cuál de los tres obtendría la mayor utilidad esperada:

1. El primer juego es sobre apuestas de caballos, donde los primeros tres lugares obtienen premio. El primer lugar paga el doble de la apuesta, el segundo 1.5 veces y el tercero 1.1 veces lo apostado. Cada uno de los 15 caballos de la competencia demora un tiempo distribuido exponencialmente de tasa  $\frac{1}{15} \left[ \frac{1}{min} \right]$ .
  - a) Calcule la probabilidad de que el caballo al cual le apueste Saavedra obtenga el primer, segundo y tercer lugar.
  - b) Calcule la utilidad esperada de Oscar si apuesta en este juego
2. El segundo juego se basa en el lanzamiento de dos dados. Oscar debe apostar a un par de números, y los dos dados son lanzados diez veces. Cada vez que salga el par de dados que Saavedra eligió, se pagará 70.000[um].
  - a) Indique cómo se distribuye el número de veces que salen los dados que Oscar pronosticó en los 10 lanzamientos.
  - b) Calcule la utilidad esperada de Oscar si apuesta en este juego.
3. El tercer juego consiste en observar dos cubos de hielo y apostar si del cubo A caen dos gotas antes que del cubo B caiga una, o apostar lo contrario. Se sabe que una gota del cubo A demora en caer un tiempo exponencialmente distribuido de tasa  $\frac{1}{15} \left[ \frac{1}{seg} \right]$ ; del cubo B demora un tiempo exponencialmente distribuido de tasa  $\frac{1}{28} \left[ \frac{1}{seg} \right]$ . De ganar Saavedra obtiene 1.7 veces su dinero.
  - a) Calcule la probabilidad de que ocurra cada una de las alternativas de este juego.
  - b) Suponiendo que Saavedra apuesta al resultado más probable, calcule la utilidad esperada que obtiene Saavedra en este juego.

### Problema 2

El ingenioso equipo docente de IN44A ha decidido implementar un pionero sistema de aprendizaje del ramo el cual se detalla a continuación. Del total de los alumnos del curso se realiza una exigente selección luego de la cual clasifican K participantes los cuales deben ingresar a una sala-estudio donde serán sometidos a intensas clases. Dentro de los clasificados se encuentra el distinguido alumno Tony Valero.

Al final de cada semana se realiza una prueba de conocimientos y el alumno con menor nota queda amenazado por conocimientos. La nota de cada uno de los alumnos que están en la sala en la semana s son variables aleatorias i.i.d. de distribución exponencial de parámetro  $\lambda_s$ . Luego de esta prueba se realiza una votación donde los participantes deben elegir a uno de sus compañeros para ser amenazado por convivencia. En esta elección no se puede votar por el amenazado por conocimientos. Si Tony Valero todavía está participando en la semana s y no tuvo problemas en la prueba de conocimientos, con probabilidad  $p_s$  será amenazado por convivencia.

Una vez conocidos los dos amenazados de la semana s, son sometidos a votación popular para decidir quién debe abandonar la sala, en la cual se estima que con probabilidad  $q_s$  el eliminado es el amenazado por conocimientos. Este procedimiento se repite por  $K - 4$  semanas hasta que se conoce a los 4 finalistas.

La gran final funciona de la siguiente manera: Los finalistas son sometidos a un examen que consta de una única pregunta. Los tiempos que demoran cada uno de los finalistas en responder esta pregunta son variables aleatorias i.i.d. de distribución

exponencial de parámetro  $\mu$ . Además, se sabe que debido a la presión a la que han sido sometidos existe una probabilidad  $r$  de que la respuesta entregada sea incorrecta con lo cual el participante queda automáticamente eliminado del concurso. Luego el ganador es el primer alumno que entregue el examen resuelto correctamente. Si todos responden de manera errada el primer lugar se declara desierto.

El objetivo de este problema es calcular la probabilidad que Tony Valero gane el concurso.

1. ¿Cuál es la distribución que sigue la menor de las notas en la prueba de conocimientos de la semana  $s$ ? Si Tony Valero está en competencia en la semana  $s$  ¿Cuál es la probabilidad de que sea el amenazado por conocimientos?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que Tony Valero sea eliminado en la semana  $s$ ? Denota a esta probabilidad como  $F_s$ .  
Hint: Note que para calcular esta probabilidad es necesario tomar en consideración lo sucedido en las  $s - 1$  semanas anteriores.
3. Calcule el número esperado de semanas que permanece Tony dentro de la sala-estudio.
4. ¿Cuál es la probabilidad de que Tony esté entre los 4 finalistas?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que Valero sea el ganador?