CLASE AUXILIAR 11
ECONOMÍA I – IN41A-04
Tema: Teoría de Juegos y Oligopolio

PROFESOR: LEONARDO BASSO
AUXILIAR: CARLOS RAMÍREZ

PROBLEMA 1

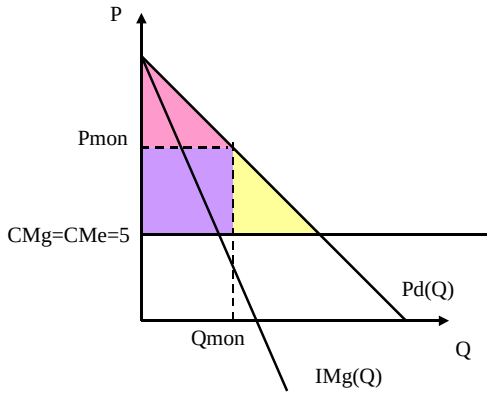
Un monopolista presenta una función de costos marginales constantes e iguales a 5 y enfrenta la siguiente demanda de mercado: $Q = 53 - P$

a. Determine el equilibrio de mercado (cantidad, precio y utilidades del monopolio). Grafique el costo social del monopolio.

Debido a la alta demanda, una nueva firma logra entrar al mercado. Su función de costos es la misma que la original. Suponga que las firmas se comportan según un Duopolio de Cournot, donde cada una maximiza sus utilidades según lo que produce la otra firma.

b. Determine la función reacción de cada firma.
c. Determine cuál será la combinación de las cantidades producidas por cada firma para la cual las expectativas de ambas se vean confirmadas, determine el precio, cantidades y utilidades de cada una.

Respuesta:
a) IMg= CMg
$53-2*Q = 5 \Rightarrow Q^* = 24$
en demanda de mercado $P=53-Q=53-24 \Rightarrow P^* = 29$
$\Rightarrow \pi = 24*29-5*24$
$\Rightarrow \pi = 576$



Para el caso del monopolio, con costos marginales constantes se tiene que el área rosada corresponde al Excedente de los consumidores, la morada al de los productores, y la amarilla es el costo social. Esto en comparación al caso competitivo donde la suma de estos tres excedentes, sólo es Excedente de los consumidores.

b) max $\pi_1 = (53-(Q_1+Q_2))*Q_1 - 5*Q_1 = 53Q_1-Q_1^2-Q_1Q_2-5Q_1$

$\Rightarrow \pi_1 = 48Q_1-Q_1^2-Q_1Q_2$

al maximizar derivando con respecto a Q_1 se obtiene: $48-2Q_1-Q_2=0$

por lo que la función de reacción es: $Q_1^* = 24-Q_2/2$

max $\pi_2 = (53-(Q_1+Q_2))*Q_2 - 5*Q_2 = 53Q_2-Q_2^2-Q_1Q_2-5Q_2$

$\Rightarrow \pi_2 = 48Q_2-Q_2^2-Q_1Q_2$

al maximizar derivando con respecto a Q_2 se obtiene: $48-2Q_2-Q_1=0$

por lo que la función de reacción es: $Q_2^*=24-Q_1/2$

d) Única combinación será la del equilibrio no cooperativo: $Q_1^*=Q_1$, $Q_2^*=Q_2$
Utilizando las funciones de reacción de cada firma:
$Q_1^*=24-Q_2/2$
$Q_2^*=24-Q_1/2$

$\Rightarrow Q_1=24-24/2+Q_1/4$
$\Rightarrow 3*Q_1/4=12$
$\Rightarrow Q_1=16$
$\Rightarrow Q_2=16$

reemplazando en la demanda de mercado: $P=53-(Q_1+Q_2)=53-32$
$\Rightarrow P^*=21$

las utilidades: $\pi_1=\pi_2=21*16-16*5$
$\Rightarrow \pi_1=\pi_2=256$
$\Rightarrow \pi=512$

PROBLEMA 2
El mercado de los gorros de lana de un país muy lejano está formado por dos firmas, Niebla y Corral, cuyas

funciones de costo son idénticas e iguales a:

$$C(q) = a + cq$$

La función de demanda por gorros de lana en este mercado es:

$$Q(P) = D - P$$

Donde D > a > c > 0

Dados los siguientes escenarios:

i. Ambas firmas compiten de acuerdo al modelo de Cournot
ii. Las firmas se coluden
iii. Niebla se comporta como líder determinado la cantidad a producir
iv. Corral se comporta como líder determinando la cantidad a producir

a. (Encuentre el equilibrio (precios y cantidades) en cada escenario y las utilidades de las firmas.

Cournot:

$$\pi_i = P(Q)q_i - C(q_i)$$
$$\pi_i = \left[D - (q_i + q_{-1})\right]q_i - cq_i$$
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = D - 2q_i - q_{-1} - c = 0$$
$$q_i = \frac{D - q_{-1} - c}{2}$$

Por simetría:

$$q_i = q_{-i} = \frac{D-c}{3}$$

$$Q_{cournot} = q_i + q_{-i} = \frac{2(D-c)}{3}$$

$$P_{cournot} = \frac{D+2c}{3}$$

$$\pi_i = \frac{(D+2c)}{3}\frac{(D-c)}{3} - a - c\frac{(D-c)}{3}$$

$$\boxed{\pi_{i(cournot)} = \frac{(D-c)^2}{9} - a}$$

Colusión:

$$\pi_{total} = P(Q)Q - C(Q)$$

$$\pi_{total} = [D-Q]Q - cQ$$

$$\frac{\partial \pi_{total}}{\partial Q} = D - 2Q - c = 0$$

$$Q_{colusión} = \frac{D-c}{2}$$

$$q_i = \frac{Q}{2} = \frac{D-c}{4}$$

$$P_{colusión} = \frac{D+c}{2}$$

$$\boxed{\pi_{total} = \frac{(D-c)^2}{4} - a}$$

$$\boxed{\pi_{i(colusión)} = \frac{\pi_{total}}{2} = \frac{(D-c)^2}{8} - \frac{a}{2}}$$

Stackelberg

Sea q_N = cantidad de la No líder
q_L = cantidad de la Líder

Luego, de Cournot tenemos la función de reacción de la firma No líder que calcula la líder para ver cómo reaccionaría la No líder si ella decide producir primero.

$$q_N = \frac{D - q_L - c}{2}$$

$\Rightarrow$ *La Líder Maximiza*:

$$\pi_L = (P(q_N + q_L))q_L - C(q_L)$$

$$\pi_L = (D - (q_N + q_L))q_L - a - cq_L$$

$$\pi_L = \left(D - \left\{ \left[\frac{D - q_L - c}{2} \right] + q_L \right\} \right) q_L - a - cq_L$$

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} = D - \frac{D}{2} + q_L + \frac{c}{2} - 2q_L - c = 0$$

$$q_L = \frac{D - c}{2}$$

$$q_N = \frac{D - c}{4}$$

$$Q_{Stackelberg} = q_L + q_N = \frac{3(D - c)}{4}$$

$$P_{Stackelberg} = \frac{D + 3c}{4}$$

$$\pi_L = \frac{(D + 3c)}{4} \frac{(D - c)}{2} - a - c \frac{(D - c)}{2}$$

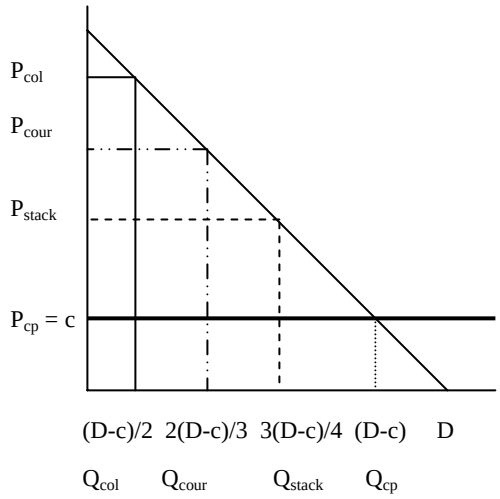
$$\pi_L = \frac{(D - c)^2}{8} - a$$

$$\pi_N = \frac{(D + 3c)}{4} \frac{(D - c)}{4} - a - c \frac{(D - c)}{4}$$

$$\pi_N = \frac{(D - c)^2}{16} - a$$

b. Calcule y ordene en forma creciente el costo social que tiene cada uno de los escenarios

Gráficamente:



Luego, Claramente, no está a escala

$$CS = \frac{1}{2}(P - c)(Qcp - Q)$$

Cournot

$$CS = \frac{1}{2}(\frac{D + 2c}{3} - c)(D - c - \frac{2}{3}(D - c))$$

$$CS = \frac{1}{2}\left(\frac{D - c}{3}\right)^2$$

Colusión

$$CS = \frac{1}{2}(\frac{D + c}{2} - c)(D - c - \frac{D - c}{2})$$

$$CS = \frac{1}{2}\left(\frac{D - c}{2}\right)^2$$

Stackelberg

$$CS = \frac{1}{2}\left(\frac{D+3c}{4} - c\right)\left(D - c - \frac{3(D-c)}{4}\right)$$

$$CS = \frac{1}{2}\left(\frac{D-c}{4}\right)^2$$

Por lo tanto se puede comprobar que:

$$\boxed{CS_{stackelberg} < CS_{cournot} < CS_{colusión}}$$

PROBLEMA 3

En el pequeño pueblo de *FarWest* hay sólo tres productores de escopetas, los cuales tienen las siguientes funciones de costos. (Para las 3 la misma)

$$C(q) = 5 + 5q$$

La demanda por escopetas está representada por la siguiente función:

$$P = 30 - Q$$

Suponga que se pueden producir "fracciones de escopetas".

a) ¿Cuál es el equilibrio si los tres productores deciden producir simultáneamente y comportarse competitivamente según el modelo de Bertrand?
Rpta: Los costos marginales de cada firma son: CMg =15. P = 15, luego Q = 30 – 15 = 15

Luego q = 15/3 = 5.

a) (4 puntos) ¿Cuál es el equilibrio si los tres productores deciden utilizar estrategias de Cournot?
Rpta:

$$\pi_1 = \left[30 - (q_1 + q_2 + q_3)\right]q_1 - 5 + 15q_1$$

$$\pi_1 = 30q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - q_1q_3 - 5 - 15q_1$$

$$\pi_1 = 15q_1 - q_1^2 - q_1q_2 - q_1q_3 - 5$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 15 - 2q_1 - q_2 - q_3 = 0$$

$$q_1 = \frac{15 - q_2 - q_3}{2}$$

$$q_2 = \frac{15 - q_1 - q_3}{2}$$

$$q_3 = \frac{15 - q_1 - q_2}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones; se obtiene lo siguiente:
q1 = q2 = q3

$$q = \frac{15 - q - q}{2}$$

$$q = \frac{15}{4}$$

$$Q = 3q = 45/4$$

$$P = 30 - 45/4 = 18.75$$

Es importante notar que pueden darse ambos equilibrios. El primero corresponde al equilibrio de Bertrand, en que las firmas compiten en precios. En el caso b), las firmas están compitiendo en cantidades.

PROBLEMA 4

Una viejita busca ayuda para cruzar la calle. Se necesita sólo una persona para ayudarle, si más personas le ayudan está bien pero no es mejor que la situación en que sólo una le ayuda. A y B son las dos personas más próximas a ella y deben decidir simultáneamente si ayudarla o no. A y B obtienen una utilidad de 3 si cualquiera de los dos ayuda a la señora. Pero el que la ayuda incurre en un costo de 1. Escriba la matriz de pagos de este juego. Encuentre el equilibrio de Nash.

En este juego los dos jugadores A y B tienen dos estrategias de ayudar (AY) o no ayudar (NAY) a la viejita. Para representar el juego en forma normal se construye la matriz con los pagos correspondientes a cada uno de los estados.

- En el caso que A y B ayudan ambos obtienen una utilidad de 3 pero incurren en un costo de 1 por lo que los pagos serán (2,2)
- En el caso que A ayuda y B no ayuda, ambos obtienen una utilidad de 3 ya que la viejita fue ayudada. Pero sólo A incurre en el costo de ayudar. Luego los pagos son (2,3)
- El caso que A no ayuda y B ayuda es análogo al anterior y los pagos son (3,2)
- En el caso que ninguno ayuda los pagos son (0,0) ya que ninguno obtiene utilidad ni incurre en costo.

		A: AY	A: NAY
B	AY	2,2	2,3
B	NAY	3,2	0,0

Los equilibrios de Nash son dos: (NAY,AY) y (AY,NAY).

PROBLEMA 5

Suponga un mercado donde existen dos firmas que actúan según el modelo de Cournot, las cuales pueden invertir en publicidad para aumentar sus ventas. La demanda es afectada por la publicidad de modo tal que:

$$q_1 = \frac{d}{2} + t\alpha - \frac{P}{2} \qquad q_2 = \frac{d}{2} + f(1-\alpha) - \frac{P}{2}$$

La demanda de mercado será: $Q^D = q_1 + q_2 = d + t\alpha + f(1-\alpha) - P$

El costo de cada firma depende del nivel de producción y la publicidad (**A_i**) efectuada; $C_i = cq_i + A_i$

Finalmente se define el coeficiente α como el nivel de publicidad relativo efectuado por la primera firma, expresado por $\alpha = \frac{A1}{A1 + A2}$

Utilice $\frac{d}{2} = 30; \quad t = 30; \quad f = 20; \quad c = 10$

a. Para un α fijo, encuentre las funciones de reacción.

Respuesta:
De la ecuación de demanda

$$Q^D = d + t\alpha + f(1-\alpha) - P$$

$$P = d + t\alpha + f(1-\alpha) - Q = d + t\alpha + f(1-\alpha) - q_1 - q_2$$

$$P = 80 + 10\alpha - q_1 - q_2$$

En la función de utilidad:

$$\Pi_1 = Pq_1 - C_1(q_1)$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 80 + 10\alpha - 2q_1 - q_2 - 10 = 0$$

$$q_1 = \frac{70 + 10\alpha - q_2}{2} \wedge q_2 = \frac{70 + 10\alpha - q_1}{2}$$

b. Para un α fijo, encuentre el equilibrio de mercado y las utilidades de las firmas.

Respuesta:
Interceptando ambas funciones de reacción, se encuentra que:

$$q_1 = \frac{70 + 10\alpha}{3} \wedge q_2 = \frac{70 + 10\alpha}{3}$$

$$Q^T = q_1 + q_2 = 2\left(\frac{70 + 10\alpha}{3}\right)$$

En la demanda

$$P = 80 + 10\alpha - 2\left(\frac{70 + 10\alpha}{3}\right) = \frac{100 - 10\alpha}{3}$$

Las utilidades:

$$\Pi_1 = Pq_1 - C_1(q_1) = q_1(P - 10) - A1$$

$$\Pi_1 = q_1(70 + 10\alpha - q_1 - q_2) - A1 = q_1(3q_1 - q_1 - q_2) - A1$$

Como $q_1 = q_2$

$$\Pi_1 = q_1^{\,2} - A1 = \left(\frac{70+10\alpha}{3}\right)^2 - A1$$

$$\Pi_2 = \left(\frac{70+10\alpha}{3}\right)^2 - A1$$

Suponga que las firmas poseen dos niveles de publicidad; Alto (A=200) y Bajo (A=100).

c. Construya la matiz de pago para estas dos estrategias y encuentre el equilibrio de Nash y el equilibrio cooperativo.

Respuesta:

CASO 1:
A1=100 ;A2=100 $\Rightarrow\alpha$=0,5
Π_1=525
Π_2=525

CASO 2:
A1=100 ;A2=200 $\Rightarrow\alpha$=0,33
Π_1=497
Π_2=397

CASO 3:
A1=200 ;A2=100 $\Rightarrow\alpha$=0,66
Π_1=453
Π_2=553

CASO 4:
A1= 200;A2=200 $\Rightarrow\alpha$=1/2
Π_1=425
Π_2=425

EMPRESA1 EMPRESA2	A1=100	A1=200
A2=100	525 525	453 553
A2=200	497 397	425 425

En este caso la estrategias (A1=100,A2=100) corresponde tanto a Nash como equilibrio Cooperativo.

PROBLEMA 6

En el mercado del Pisco la empresa "Control – Capel" captura la mayor parte del mercado, dejando a otras pequeñas empresas con porcentajes muy menores en su participación.

Considere que el mercado del Pisco se comporta según el Modelo de Stackelberg con la empresa "Control – Capel" como líder y otras dos empresas como seguidoras.

La función de costos de la empresa líder es: $C(q) = cq$
La función de cotos de las empresas seguidoras es: $C(q) = aq^2/2$
La curva de demanda en el mercado del Pisco está dada por la siguiente expresión: $Q_D = A - P$

a) ¿Cuál es la regla de decisión para las firmas seguidoras? (0,5 ptos)
b) ¿Qué maximiza la firma líder? (0,5 ptos)
c) ¿Cuál es el equilibrio de mercado? (3 ptos)
d) ¿Cuál es el costo social? (2 ptos)

Rpta:

a) Max $\pi^S = P \times q_i - aq_i^2/2$ para $i = 1,2$

$d\pi/dq_i = 0$

b) Max $\pi^L = P \times Q_D^{Líder} - c \times Q_D^{Líder}$; con $Q_D^{Líder} = Q_D(P) - Q_s^{seguidoras}(P)$

$d\pi^L/dP = 0 \quad (IMg^L = CMg^L)$

c) de la parte a)

$d\pi/dq_i = 0 \Rightarrow q_i = P/a$ (oferta de las firmas seguidoras) $\Rightarrow q_1 + q_2 = 2P/a = Q_s^{seguidoras}(P)$

de la parte b)

$Q_D^{Líder}(P) = Q_D(P) - Q_s^{seguidoras}(P) = (A - P) - 2P/a = A - P(a + 2)/a$

Max $\pi^L = P \times (A - P(a + 2)/a) - c \times (A - P(a + 2)/a)$

$d\pi/dP = 0 \Rightarrow (A - 2P(a + 2)/a) + c(a+2)/a = 0$

$\Rightarrow P^* = (Aa + c(a + 2)) / 2(a + 2)$

$\Rightarrow Q_D^{Líder} = A - ((Aa + c(a + 2)) / 2(a + 2))x(a+2)/a = (aA + c(a+2))/2a$

$\Rightarrow q_i = (Aa + c(a + 2)) / 2(a + 2)a$, para $i = 1,2$

$\Rightarrow Q^* = q_1 + q_2 + Q_D^{Líder}$

PROBLEMA 7

Suponga que existe solo una línea aérea que opera en el país, "Lan". La demanda por pasajes aéreos se puede modelar de la forma

$$Q(P) = 2400 - P$$

Los costos de producir un pasaje aéreo para "Lan" son:

$$C_L(q) = 4q^2 + 40q + 10$$

Para efectos de cálculo, "redondee".

a) Calcule el precio y la cantidad de pasajes de equilibrio en este monopolio. Calcule las utilidades del monopolio.

b) Skay" es una nueva línea aérea que está evaluando su entrada al mercado. El resultado de esta entrada será el del modelo de liderazgo de Stackelberg en el cual Lan es Líder. La función de costos de "Skay" es

$$C_S(q) = 3q^2 + 120q + 30$$

¿Cuál será el resultado?. (Utilidades de cada uno).

c) Lan sabe que si "Skay" entra, se dará la situación de la parte b). ¿Cuánto debería estar dispuesto a pagar Lan por Skay?.

Respuesta:

a)

El monopolio resuelve Img = Cmg

$$Cmg = 8q + 40$$
$$P = 2400 - q$$
$$IMg = 2400 - 2q = 8q + 40$$
$$10q = 2360$$
$$q = 236$$
$$P = 2400 - 236 = 2164$$
$$\Pi = 2164 \times 236 - 4 \times 236^2 - 40 \times 236 - 10$$
$$\Pi = 278470$$

b)

(1) = LAN
(2) = SKAY

Se calcula la función de reacción de SKAY

$$\Pi_2 = (2400 - (q_1 + q_2))q_2 - 3q_2^2 - 120q_2 - 30$$
$$\frac{d\Pi_2}{dq_2} = 0 \Rightarrow 2400 - q_1 - 2q_2 - 6q_2 - 120 = 0$$
$$q_2 = \frac{2280 - q_1}{8}$$

Con esto, la función de utilidad de (1) se escribe de la siguiente forma :

$$\Pi_1 = (2400 - (q_1 + \frac{2280 - q_1}{8}))q_1 - 4{q_1}^2 - 40q_1 - 10$$

$$\frac{d\Pi_1}{dq_1} = 0 \Rightarrow 2400 - (2q_1 + \frac{2280 - 2q_1}{8}) - 8q_1 - 40 = 0$$

$$19200 - 16q_1 - 2280 + 2q_1 - 64q_1 - 320 = 0$$

$$16600 = 78q_1$$

$$q_1 \approx 213$$

Luego,

$$q_1 \approx 258$$

$$Q = q_1 + q_2 = 471$$

$$P = 2400 - 471 = 1929$$

$$\Pi_1 = 1929 \times 213 - 4 \times 213^2 - 40 \times 213 - 10 = 220871$$

$$\Pi_2 = 1929 \times 258 - 3 \times 258^2 - 120 \times 258 - 30 = 267000$$

c)

Si LAN compra SKAY, podrá actuar como monopolio nuevamente, esta vez, con dos plantas con las funciones de costo

$$C_1 = 4{q_1}^2 + 40q_1 + 10$$

$$C_2 = 3{q_2}^2 + 120q_2 + 30$$

Sabemos que la condición de maximización de utilidades en un monopolio con dos plantas viene dada por

$$CMg_1 = CMg_2 = CMg = IMg$$

Luego, el monopolio elige ambas cantidades que satisfagan

$$CMg_1 = CMg_2 \Rightarrow 8q_1 + 80 = 6q_2 + 120$$

$$IMg = CMg \Rightarrow 2400 - 2(q_1 + q_2) = 6q_2 + 120$$

Resolviendo el sistema se llega a

$$q_1 = 184$$

$$q_2 = 239$$

$$Q = 184 + 239 = 423$$

$$P = 2400 - 423 = 1977$$

$$\Pi_1 = 1977 \times 184 - 4 \times 184^2 - 40 \times 184 - 10 = 220974$$

$$\Pi_2 = 1977 \times 239 - 3 \times 239^2 - 120 \times 239 - 30 = 272430$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = 220974 + 272430 = 493404$$

La disposición a pagar de LAN por SKAY es en el límite la diferencia de utilidades que obtiene en el caso de competir con ella, y en el caso de colusión (o monopolio con dos plantas). Luego la disposición a pagar es

$$D = 493404 - 220871 = 272533$$

PROBLEMA 8

Para que dos o más empresas decidan coludirse (formar un cartel) y esto sea "estable", cada una deberá obtener al menos las utilidades que tendría si actuara bajo el modelo de Cournot. ¿Cambia su respuesta si la competencia es del tipo Bertrand con bienes homogéneos?

R: En el caso típico tenemos que el cartel no es estable porque al menos uno de los participantes tendrá incentivos para salirse del acuerdo, y competir como Cournot. (obtiene mas utilidades si se mueve pero su rival no lo hace). En el equilibrio no cooperativo obtienen menos utilidades conjuntas, pero uno de los 2 participantes obtiene más utilidades no cooperando.

Por otro lado, si las firmas pueden elegir entre coludirse o competir Bertrand, una de las firmas, DADO que la otra se mantiene en el cartel cobrando el precio monopólico, tiene incentivos a cobrar un épsilon menos, llevarse todo el mercado y aumentar sus utilidades.

Por lo tanto, en ambos casos el cartel no es sostenible.

PROBLEMA 9

Suponga un oligopolio en que las empresas deben decidir entre utilizar precios altos, bajos o de guerra. Encuentre el/los equilibrios de Nash (Competitivos).

	a	b	g
A	10 10	14 -5	0 -10
B	-5 14	5 5	0 -5
G	-10 0	-5 0	0 0

En este juego hay dos equilibrios de Nash. 6,9 B,b 10,0

R. Los equilibrios se encuentran por eliminación simple inspección. Aquí se ve claramente que un eq de Nash no es necesariamente pareto eficiente (no maximiza las utilidades conjuntas) y no requiere de agentes externos que lo sostengan (no hay incentivos a moverse)