



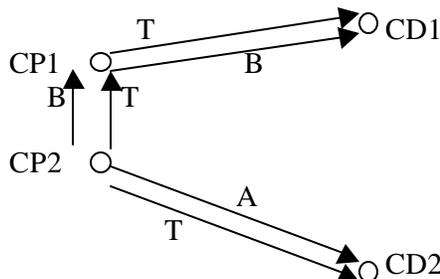
Profesores: Felipe Caro, Patricio Conca, Andrés Musalem, Richard Weber, Gabriel Weintraub
Auxiliares: Fabiola Araya, Marcel Goic, Ricardo Montoya, Andrés Pardo, Juan Pablo Troncoso, Richard Vega

I

Una empresa produce un producto P en las ciudades CP1 y CP2 y tiene un inventario del producto de 1000 unidades en CP1 y 1500 unidades en CP2. Existe demanda para este producto en las ciudades CD1 (de 1200 unidades) y CD2 (de 1000 unidades), la cual debe ser satisfecha.

Las formas de transporte del producto se describen en la siguiente tabla:

| Origen - Destino | Forma de Transporte | Costo (en unidades monetarias (UM) para una unidad transportada del producto P) |
|------------------|---------------------|---|
| CP2 - CP1 | barco (B) | 5 |
| CP2 - CP1 | tren (T) | 10 |
| CP1 - CD1 | tren (T) | 35 |
| CP1 - CD1 | barco (B) | 5 |
| CP2 - CD2 | tren (T) | 45 |
| CP2 - CD2 | avión (A) | 10 |



Los barcos tienen una capacidad máxima de 1000 unidades y el avión tiene una capacidad máxima de 200 unidades. Los trenes no tienen capacidad máxima. Para realizar transporte en barco se requieren al menos 100 unidades. El transporte en barco tiene un costo fijo asociado de 200 UM y el costo fijo del transporte en avión es 50 UM. El transporte en tren no tiene un costo fijo asociado.

Formule un modelo de programación lineal binaria que minimice los costos totales del transporte y que satisfaga todas las restricciones mencionadas anteriormente.

II

- Comente la siguiente afirmación: “La Fase I del Algoritmo Simplex finaliza cuando todas las variables artificiales salen de la base”.
- Suponga que usted sólo puede resolver la Fase I del Algoritmo Simplex. Bajo esa condición explique una forma sencilla para saber si un determinado problema lineal factible es acotado o no. Indicación: recuerde algún resultado de dualidad.

- Considere el problema lineal:

$$\begin{aligned} \min & c^T x \\ \text{s/a} & a_i^T x \leq b_i \quad i=1, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Con c y a_i ($i=1,\dots,m$) vectores en \mathbb{R}^n y b_i ($i=1,\dots,m$) escalares. Una restricción se dice “*redundante*” si esta se puede eliminar y la región factible no cambia. Matemáticamente se tiene que la j -ésima restricción es *redundante* si $\forall x \in \mathbb{R}^n: a_i^T x \leq b_i \ \forall i \neq j \Rightarrow a_j^T x \leq b_j$. Invente un problema auxiliar que permita determinar usando el algoritmo Simplex si la j -ésima restricción del problema original es *redundante* o no. Indicación: defínase la función objetivo $b_j - a_j^T x$.

II

Un artesano en madera produce sillas (x_1), mesas (x_2) y libreros (x_3) y vende cada uno de estos productos a 30, 50 y 40 respectivamente (cifras en miles de pesos). Para producir requiere de 3 insumos: horas-hombre, madera y pintura, cuya disposición es 800, 900 y 600 respectivamente (en unidades). Por lo tanto, el problema de programación lineal que entrega el plan óptimo de producción al artesano es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 30x_1 + 50x_2 + 40x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 800 \\ & 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 900 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 600 \\ & x_i \geq 0, \ \forall i \end{aligned}$$

- Formule el problema dual del problema anterior.
- Entregue una interpretación económica del problema dual (quién lo resuelve, qué significa la función objetivo, qué representan las variables y las restricciones).
- Se sabe que la solución óptima del problema primal es $x_1^* = 140$, $x_2^* = 80$, $x_3^* = 0$. Encuentre la solución del problema dual.
- Si el artesano tuviera que comprar una unidad adicional de un insumo, ¿de cuál le convendría comprar? (Suponga que el costo de todos los insumos es el mismo). ¿Cuánto es lo máximo que estaría dispuesto a pagar por esa unidad? Con la información disponible y *sin realizar cálculos adicionales*, ¿es posible saber la máxima disposición a pagar por 50 unidades de madera? Justifique cada una de sus respuestas.
- ¿Sin realizar cálculos adicionales, determine los precios mínimos en los cuales el artesano vendería todos sus insumos (madera, horas-hombre y pintura)? Justifique.

IV

Sea el problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 \leq 800 \\ & 1,5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 1000 \\ & 0,5x_1 + 0,6x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 340 \end{aligned}$$

Se agregan las variables x_5 , x_6 y x_7 como variables de holgura a la primera, segunda y tercera restricción respectivamente. Se sabe que la matriz básica óptima es $B^* = [A_2, A_1, A_7]$, siendo su inversa

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de la información dada responda:

- Determine el rango de variación de $c_2 = 14$, de tal manera que no cambie la matriz básica óptima. ¿Si c_2 toma un valor fuera de este rango, ¿Cómo calcularía la nueva solución óptima?
- Se sabe que el precio sombra asociado a la primera restricción es $y_1 = 5$. Determine cuál es el rango de variación de $b_1 = 800$ para el cual es válido el valor $y_1 = 5$. Si y_1 toma un valor fuera de este rango, ¿Cómo calcularía la nueva solución óptima?

PAUTA PREGUNTA 1

Variables de decisión:

$p_{2,1,T}$ = cantidad del producto transportado de CP2 a CP1 por tren
 $p_{2,1,B}$ = cantidad del producto transportado de CP2 a CP1 por barco

$x_{1,1,T}$ = cantidad del producto transportado de CP1 a CD1 por tren
 $x_{1,1,B}$ = cantidad del producto transportado de CP1 a CD1 por barco
 $x_{2,2,T}$ = cantidad del producto transportado de CP2 a CD2 por tren
 $x_{2,2,A}$ = cantidad del producto transportado de CP2 a CD2 por avión

$B_{2,1,B}$ = variable binaria para indicar un transporte de CP2 a CP1 por barco
 $B_{1,1,B}$ = variable binaria para indicar un transporte de CP1 a CD1 por barco
 $B_{2,2,A}$ = variable binaria para indicar un transporte de CP2 a CD2 por avión

Restricciones:

$x_{1,1,T} + x_{1,1,B} = 1200$ (demanda en CD1)
 $x_{2,2,T} + x_{2,2,A} = 1000$ (demanda en CD2)

$x_{1,1,T} + x_{1,1,B} \leq 1000 + p_{2,1,T} + p_{2,1,B}$ (inventario en CP1 más transporte de CP2 a CP1 por tren o por barco)
 $x_{2,2,T} + x_{2,2,A} + p_{2,1,T} + p_{2,1,B} \leq 1500$ (inventario en CP2)

$p_{2,1,B} \leq 1000 * B_{2,1,B}$ (El barco de CP2 a CP1 tiene una capacidad máxima de 1000 unidades.)
 $x_{1,1,B} \leq 1000 * B_{1,1,B}$ (El barco de CP1 a CD1 tiene una capacidad máxima de 1000 unidades.)
 $x_{2,2,A} \leq 200 * B_{2,2,A}$ (El avión tiene una capacidad máxima de 200 unidades.)

$x_{1,1,B} \geq 100 * B_{1,1,B}$ (monto mínimo en caso del transporte con el barco de CP1 a CD1)
 $p_{2,1,B} \geq 100 * B_{2,1,B}$ (monto mínimo en caso del transporte con el barco de CP2 a CP1)

$p_{2,1,B}, p_{2,1,T}, x_{1,1,T}, x_{1,1,B}, x_{2,2,T}, x_{2,2,A} \geq 0$ (no negatividad)

$B_{2,1,B}$ = variable binaria para indicar un transporte de CP2 a CP1 por barco (=1, si hay un transporte de CP2 a CP1 por barco; =0 en otro caso)

$B_{1,1,B}$ = variable binaria para indicar un transporte de CP1 a CD1 por barco (=1, si hay un transporte de CP1 a CD1 por barco; =0 en otro caso)

$B_{2,2,A}$ = variable binaria para indicar un transporte de CP2 a CD2 por avión (=1, si hay un transporte de CP2 a CD2 por avión; =0 en otro caso)

Función objetivo:

$\min (10 * p_{2,1,T} + 200 * B_{2,1,B} + 5 * p_{2,1,B}) + (35 * x_{1,1,T} + 5 * x_{1,1,B} + 200 * B_{1,1,B}) + (45 * x_{2,2,T} + 10 * x_{2,2,A} + 250 * B_{2,2,A})$

= \min (transporte de CP2 a CP1) + (transporte de CP1 a CD1) + (transporte de CP2 a CD2)

P2 a) Falso. La Fase I termina una vez que se encuentra el óptimo w^* del problema auxiliar. Sin embargo, la base óptima puede contener variables auxiliares. Por ejemplo, si $w^* > 0$ el problema original es infactible y necesariamente al menos una de las variables auxiliares es básica.

b) Basta con resolver la Fase I del problema dual y aplicar uno de los corolarios del teorema débil de dualidad. Si la Fase I muestra que el dual es infactible, entonces el problema primal es no acotado. Así mismo, si el dual es factible entonces el primal es acotado.

(Nota que es importante saber de antemano que el primal es factible, de lo contrario los corolarios no son aplicables)

c) Considere el problema auxiliar

$$(P_R) \min q = b_j - a_j^T x$$

$$\text{s.t.} \quad a_i^T x \leq b_i \quad i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$$

$$x \geq 0$$

Si (P_R) es infactible entonces el probl. original tb. lo es y la restricción j es trivialmente redundante.

Si (P_R) es factible y acotado con $q^* \geq 0$ también se tiene redundancia.

En cualquier otro caso (no acotado y/o $q^* < 0$) se tiene que la restricción j no es redundante.

a) Problema dual es:

$$\min w = 800 \cdot \pi_1 + 900 \cdot \pi_2 + 600 \cdot \pi_3$$

$$\text{s.a.} \quad 4\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 \geq 30$$

$$3\pi_1 + 6\pi_2 + 3\pi_3 \geq 50$$

$$3\pi_1 + 5\pi_2 + 5\pi_3 \geq 40$$

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \geq 0$$

b) Una interpretación económica del problema dual es la siguiente: es el problema que resuelve un inversionista para determinar los precios π_i a los cuales comprar los recursos (b_i) del artesano. El inversionista minimiza su gasto (w) y los precios que ofrece deben ser lo suficientemente altos, de modo que la oferta sea tan atractiva para el productor como dedicarse a producir.

Por ejemplo, la primera restricción dice que el beneficio que recibirá el productor al vender los insumos equivalentes a una silla es mayor o igual al beneficio que le reporta vender la silla.

Además, los precios deben ser positivos.
(INTERPRETACIONES SIMILARES A ÉSTA SON OK)

(c) Utilizamos el teorema de holgura complementaria.

La restricción 3 del primal no es activa $\Rightarrow \pi_3 = 0$

Además $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$ Restricción 1 y 2 del dual son activas.

$$\begin{array}{l|l} \Rightarrow & 4\pi_1 + 3\pi_2 = 30 \\ & 3\pi_1 + 6\pi_2 = 50 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \pi_1^* = 2 \\ \pi_2^* = 7, \bar{3} \\ \pi_3^* = 0 \end{array}$$

(d) Le convendría comprar 1 ud. de madera ya que esa restricción tiene la mayor variable dual asociada (recordar que $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \pi_i^*$)

Máxima disposición a pagar = $\pi_2^* = 7, \bar{3}$.

π_i^* es $\frac{\partial z^*}{\partial b_i}$ siempre que la base óptima se mantenga ante cambios en b_i . Si b_2 cambia en 50 uds, la base óptima puede cambiar, por lo tanto no es posible determinar la máxima disposición a pagar sin realizar cálculos adicionales (al menos debemos verificar si la base óptima se mantiene).

(e) El individuo vendería sus maderas a precios $\pi_1^* = 2$, $\pi_2^* = 7, \bar{3}$ y $\pi_3^* = 0$ respectivamente.

De esa manera, obtendría un beneficio igual a $w^* = 800 \cdot 2 + 900 \cdot 7, \bar{3} = 8200$, que como sabemos por el teorema fuerte es igual a z^* (el máximo beneficio obtenido si se dedica a producir).

P4/

a) se deben calcular los costos de las variables no básicas en función de c_2 imponiendo el cumplimiento del ~~costo~~ sistema de optimalidad resultante el rango pedido.

$$\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j \quad c_B^T = (c_2', -8, 0)$$

$$\bar{c}_3 = -30 - (11c_2' + 96) \geq 0 \rightarrow \text{ii)} \quad \begin{aligned} -c_2' &\geq 126/11 \\ c_2 &\geq 126/11. \end{aligned}$$

$$\bar{c}_4 = -50 - (19c_2' + 176) \geq 0 \rightarrow \text{i)} \quad \begin{aligned} -c_2' &\geq 226/19 \\ c_2 &\geq 226/19. \end{aligned}$$

$$\bar{c}_5 = 0 - (1,5c_2' + 16) \geq 0 \rightarrow \text{iii)} \quad \begin{aligned} -c_2' &\geq 16/1,5 \\ c_2 &\geq 16/1,5 \end{aligned}$$

$$\bar{c}_6 = 0 - (-c_2' - 16) \geq 0 \rightarrow \text{iv)} \quad \begin{aligned} c_2' &\geq -16 \\ -c_2' &\leq 16 \\ c_2 &\leq 16. \end{aligned}$$

Luego si: $\frac{226}{19} \leq c_2 \leq 16$

se mantiene la misma base óptima.

b) se deben calcular los coeficientes del lado derecho, en función de b_2 , en la última forma canónica.
Imponiendo que la última forma canónica no tenga lados derechos negativos se tiene:

$$\text{i)} \quad 1,5b_1 - 1000 \geq 0 \rightarrow b_1 \geq \frac{1000}{1,5}$$

$$\text{ii)} \quad -2b_1 + 2000 \geq 0 \rightarrow b_1 \leq 1000$$

$$\text{iii)} \quad 0,1b_1 - 60 \geq 0 \rightarrow b_1 \geq 600$$

luego si $\frac{1000}{1.15} \leq b_1 \leq 1000$

la última forma concinca no cambia

Como $y^{KT} = c_p^{KT} \cdot 3^{K-1}$, entonces si no cambia
la última forma concinca no cambian los
peris cambia