Ecs de mov en coord θ:

$$\delta M = \sigma \delta A \delta\theta \qquad \boxed{\sigma = -\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial\theta}}$$

Ec. de cont.:

$$\frac{1}{\delta M}\frac{D}{Dt}(\delta M) = \frac{1}{\sigma\delta A\delta\theta}\frac{D}{Dt}(\sigma\delta A\delta\theta) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt} + \frac{1}{\delta A}\frac{D}{Dt}(\delta A) + \frac{1}{\delta\theta}\frac{D}{Dt}(\delta\theta) = 0$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt} + \frac{1}{\delta A}\delta\frac{DA}{Dt} + \frac{1}{\delta\theta}\delta\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{D\sigma}{Dt} + \nabla_\theta\cdot\vec{V} + \frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{D\sigma}{Dt} + \sigma\nabla_\theta\cdot\vec{V} + \sigma\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla_\theta\sigma + \dot\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + \sigma\nabla_\theta\cdot\vec{V} + \sigma\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \nabla_\theta\cdot(\sigma\vec{V}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma\dot\theta) = 0}$$

Ec. de momentum

$$\boxed{\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \nabla_\theta\left(\frac{1}{2}\vec{V}\cdot\vec{V} + \psi\right) + (\zeta_\theta + f)\hat{k}\times\vec{V} = -\dot\theta\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta} + \hat{k}\cdot\nabla\times\vec{F}_r}$$

donde
$$\nabla_\theta = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\Big)_\theta + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}\Big)_\theta$$

$$\zeta_\theta = \hat{k}\cdot\nabla_\theta\times\vec{V}$$

$$\psi = c_pT + \Phi = \Phi + \Pi\theta \qquad \text{con } \Pi = c_p\frac{T}{\theta}\ y$$

Ec. hidrostática:

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \Pi} \qquad T = \theta\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}$$

ψ: fn corriente de Montgomery

Π: fn de Exner

Estas ecs forman un sistema cerrado en $\vec{V}, \sigma, \psi$ y p si se conocen $\dot\theta$ y $\vec{F}_r$

Ecuación de vorticidad:

Tomando $\hat{k}\cdot\nabla_\theta \times$ de la ec. de movimiento resulta

$$(1) \quad \boxed{\frac{\tilde{D}}{Dt}(\zeta_\theta + f) + (\zeta_\theta + f)\nabla_\theta\cdot\vec{V} = \hat{k}\cdot\nabla_\theta\times\left(\vec{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right)}$$

donde $\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla_\theta$ es la derivada siguiendo el movimiento horizontal sobre una superficie isentrópica.

Como $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}$

la ec. de continuidad puede ser escrita, multiplicándola por σ^{-2}:

$$\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sigma^2}\nabla_\theta\cdot(\sigma\vec{V}) + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma\dot{\theta}) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\nabla_\theta\cdot\vec{V} + \frac{1}{\sigma^2}\nabla_\theta\sigma\cdot\vec{V} = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma\dot{\theta})$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \vec{V}\cdot\nabla_\theta\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\nabla_\theta\cdot\vec{V} = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma\dot{\theta})$$

$$(2) \quad \frac{\tilde{D}}{Dt}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma}\nabla_\theta\cdot\vec{V} = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma\dot{\theta})$$

Entonces haciendo $\frac{1}{\sigma}\times(1) + (\zeta_\theta + f)\times(2)$:

$$\frac{\tilde{D}}{Dt}\left(\frac{f+\zeta_\theta}{\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f+\zeta_\theta}{\sigma}\right) + \vec{V}\cdot\nabla\left(\frac{f+\zeta_\theta}{\sigma}\right) = \frac{f+\zeta_\theta}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma\dot{\theta}) + \frac{1}{\sigma}\hat{k}\cdot\nabla_\theta\times\left(\vec{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right)$$

$$\boxed{\frac{\tilde{D}P}{Dt} = \frac{P}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma\dot{\theta}) + \frac{1}{\sigma}\hat{k}\cdot\nabla_\theta\times\left(\vec{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right)}$$

donde $P = \frac{f+\zeta_\theta}{\sigma} = (f+\zeta_\theta)\left(-g\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)$ vorticidad potencial de Ertel

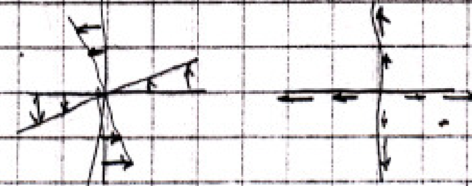
Notar que si el calentamiento diabático y el roce son nulos, el movimiento horizontal sobre una superficie isentrópica conserva la vortic. pot. de Ertel.

La ecuación de vorticidad (1) puede ser escrita en la forma

$$\frac{\partial\zeta_\theta}{\partial t} = -\nabla_\theta\cdot\left[(f+\zeta_\theta)\vec{V}\right] + \hat{k}\cdot\nabla_\theta\times\left[\vec{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right]$$

y recordando que para un vector $\vec{A}$ arbitrario:

$$\hat{k}\cdot\nabla_\theta\times\vec{A} = \nabla_\theta\cdot(\vec{A}\times\hat{k})$$



se puede reescribir

$$\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial t} = -\nabla_\theta\cdot\left[(\zeta_\theta+f)\vec{V} - \left(\vec{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right)\times\hat{k}\right]$$

expresión que muestra que la vorticidad isentrópica en un punto fijo se origina sólo en la divergencia del vector

$$(f+\zeta_\theta)\vec{V} - \left(\vec{F}_r - \dot{\theta}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\theta}\right)\times\hat{k}$$

Sobre una superficie isentrópica, que no intercepte la sfc, la vorticidad media es constante, pues al integrar sobre ella la divergencia, transformada en flujo a través de un perímetro nulo, integra a cero, dando

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{1}{A}\oiint \zeta_\theta\, dA}_{\bar{\zeta}_\theta = cte} = 0$$

Además

$$\zeta = \hat{k}\cdot\nabla\times\vec{V} = \frac{1}{a\cos\varphi}\left[\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{\partial(u\cos\varphi)}{\partial\varphi}\right]$$

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\zeta\, a^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda = \frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\partial v}{\partial\lambda} - \frac{\partial(u\cos\varphi)}{\partial\varphi}\right]d\varphi\, d\lambda$$

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{4\pi a}\left\{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|v\right|_{\lambda=0}^{\lambda=2\pi}d\varphi - \int_0^{2\pi}\left|u\cos\varphi\right|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2}d\lambda\right\}$$

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{4\pi a}\left\{0 - 0\right\} = 0$$

La vorticidad en la sfc isentrópica es redistribuida por el movimiento, pero no la crea ni la destruye.

Ec con fn. de Exner: $\Pi = C_p \frac{T}{\theta} = c_p \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/c_p}$

i) 1er Pr. Td:

$$T\,ds = dq = C_p\,dT - \alpha\,dp \qquad \text{con} \qquad ds = c_p\,d(\ln\theta)$$

$$ds = C_p \frac{1}{\theta}\,d\theta$$

$$T\,ds = C_p \frac{T}{\theta}\,d\theta = \Pi\,d\theta \qquad \boxed{T\,ds = \Pi\,d\theta} \text{ 1er Pr Td}$$

notando que $\Pi\theta = C_p T$

$$d(\Pi\theta) = C_p\,dT \quad \text{y el 1er Pr. Td:}$$

$$T\,ds = d(\Pi\theta) - \alpha\,dp$$

$$-\alpha\,dp = T\,ds - d(\Pi\theta)$$
$$= \Pi\,d\theta - d(\Pi\theta) \qquad \boxed{\alpha\,dp = \theta\,d\Pi}$$

ii) Ec hidrostática

$$\alpha\,dp = -d\Phi$$

$$\boxed{\theta\,d\Pi = -d\phi} \qquad \text{con} \qquad \Psi = \phi + c_p T = \phi + \Pi\theta$$

$$\boxed{\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \Pi}$$

iii) Ec. estado $\quad p\alpha = RT \quad$ con $\quad T = \frac{\theta\Pi}{c_p}$

$$\boxed{p\alpha = \frac{R}{c_p}\Pi\theta}$$