Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI34A-03 Pauta Control 2

Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Andrés Guzmán
Pablo Castellanos

9 de octubre de 2007, Duración 2h15m

1. *a*) Escriba las unidades de la constante de Hubble, H_0, usadas en cosmología y explique su significado. [`max. 2 líneas`]

   km/s/Mpc. Para un valor "X" de la constante, dos puntos del espacio se alejan entre sí a X km/s por cada Mpc de distancia entre ellos.

   b) ¿Puede una partícula sin masa (por ejemplo, un fotón) poner en movimiento a otra partícula masiva (por ejemplo un electrón) que se encuentra en reposo? ¿Por qué?[`max. 2 líneas`]

   Sí. Porque las partículas sin masa que viajan a la velocidad de la luz portan y transfieren momentum.

   c) Explique qué significa que una cantidad física sea (i) "invariante"; (ii) "se conserve". [`max. 1 línea para cada concepto`]

   (i) Tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia inercial; (ii) permanece constante en el tiempo.

   d) Explique para qué sirve una cámara de burbujas y señale las dos características fundamentales que debe poseer. [`max. 2 líneas`]

   Para detectar trayectorias de partículas fundamentales. 1. un líquido a alta presion que pueda ser ionizado; 2. estar en presencia de un campo magnético.

   e) Nombre los tres fenómenos vistos en clases de interacción de la radiación con la materia, **en orden ascendente** de acuerdo a las energías involucradas (eV, keV, MeV). [`max. 1 línea`]

   eV: efecto fotoeléctrico; keV: efecto Compton; MeV: creación de partículas.

   f) ¿A qué velocidad la energía total de una partícula es exactamente el doble que su energía en reposo? [`max. 2 líneas`]

   $\gamma mc^2 = 2mc^2 \rightarrow v = 0{,}866c = 259\,807$ km/s

2. Considere la función de Planck:

$$u(T,\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}d\nu \tag{1}$$

   a) ¿Qué representa la función de Planck?

   Representa la densidad de energía por unidad de volumen por unidad de frecuencia de la radiación asociada a materia en equilibrio termal.

b) Demuestre que $U(T) = \int_0^\infty u(\nu)d\nu$ es proporcional a T^4. ¿Qué representa $U(T)$? *(En la integral haga el cambio de variables $x = \frac{h\nu}{kT}$).*
Tenemos que:

$$\begin{aligned} U(T) &= \int_0^\infty u(\nu,T)d\nu \\ &\quad \textit{cambio de variable } x = \frac{h\nu}{kT},\ dx = \frac{h}{kT}d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \\ &\propto T^4 \end{aligned} \tag{2}$$

$U(T)$, siendo la integral en frecuencias de la distribución de Planck, es la energía total de la radiación por unidad de volumen (unidades [J m^{-3}]).

c) Escriba la función de Planck en términos de longitud de onda en vez de frecuencia. *(Hint: Recuerde el teorema de cambio de variable para distribuciones: $f(y)dy = f(y(x))\left|\frac{dy}{dx}\right| dx$).*
Usamos el teorema de cambio de variables con $\nu(\lambda) = c/\lambda \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -c/\lambda^2$

$$\begin{aligned} u(\lambda,T)d\lambda &= \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{c}{\lambda}\right)^3 \frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}\left|\frac{-c}{\lambda^2}\right| d\lambda \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}d\lambda \end{aligned} \tag{3}$$

La función de Planck representa esta vez densidad de energía por unidad de volumen por unidad de longitud de onda.

d) Deduzca la ley de Wien que determina el máximo de la función de Planck $u(\nu)$ respecto de la temperatura. Para ello:

1) Derive la función de Planck, iguale a cero y deduzca que $x_{\max} = \frac{h\nu_{\max}}{kT}$ es solución de la ecuación: $(3-x)\exp(x) - 3 = 0$.
Tenemos, después de simplificar:

$$\frac{\partial u(\nu,T)}{\partial \nu} = \frac{2h\nu^2}{(e^{h\nu/kT}-1)^2c^2}\left(e^{h\nu/kT}\left(3 - \frac{h\nu}{kT}\right) - 3\right) \tag{4}$$

En el máximo de la función de Planck, se cumple $\partial_\nu u(\nu_{max.},T) = 0$, por ende, haciendo ecuación (4)=0 , tenemos que

$$\exp(x_{\max})(3 - x_{\max}) - 3 = 0,$$

con $x_{\max} = \frac{h\nu_{\max}}{kT}$.

2) Determine $x_{\max}$ con dos cifras significativas y deduzca la ley de Wien.
La ecuación anterior tiene dos soluciones, $x = 0$, que corresponde a $\nu = 0$ y $u(0,T) = 0$, que es el mínimo de la función de Planck y no nos interesa; y el máximo ubicado para x entre 2 y 3. Esto se deriva de $e^2(3-2) - 3 > 0$ y $e^3(3-3) - 3 = -3 < 0$. Aproximando con una recta entre esos puntos, obtenemos $x \approx 3(1 - e^{-2}) \approx 2{,}59$. Por ende, partimos en 2.6 y tanteamos hasta 2.9 en pasos de 0.1 ($\eta(x) = \exp(x)(3-x) - 3$).

x	$\eta(x)$
2.6	*2.39*
2.7	*1.46*
2.8	*0.29*
2.9	*-1.18*

y en 2.85, $\eta(2{,}85) \approx -0{,}4 < 0$. *Esto implica* $x_{\mathrm{max.}} \approx 2{,}8$ *con 2 cifras significativas.*

Podemos escribir entonces la ley de Wien como:

$$\begin{aligned} \frac{h\nu_{\mathrm{max.}}}{kT} &\approx 2{,}8 \\ \Rightarrow \nu_{\mathrm{max.}} &\approx 5{,}8\ 10^{10}\ T\ [\mathrm{hz/K}] \end{aligned} \tag{5}$$

e) Haga un gráfico con dos funciones de Planck a distinta temperatura. Indique las unidades de los ejes, posición relativa de los máximos, zonas de crecimiento y decrecimiento. Considerando dos campos radiativos que siguen la ley de Planck, ¿Es correcto decir que en el de menor temperatura hay mayor densidad de fotones menos energéticos? Justifique.

En la figura 1 se ven dos curvas de la función de Planck a dos temperaturas diferentes (100 y 150 K). Las unidades de la función de Planck son $Jm^{-3}hz^{-1}$*,para las ordenadas y hz para las abcisas. Los ejes sólo tienen un cambio de escala. Las posiciónes de los máximos son proporcionales a la temperatura según la ley de Wien (ecuación 5), por lo que la curva que representa la mayor temperatura tiene el máximo a mayor frecuencia. Las zonas de crecimiento y decrecimiento son antes y después de este único máximo, respectivamente.*

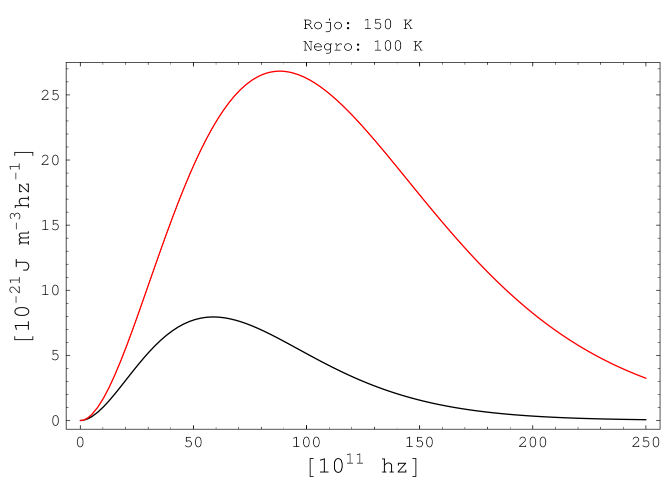

Figura 1: 2 funciones de Planck a distintas temperaturas. Cada una tiene una sola zona de crecimiento y una sola zona de decrecimiento, con el máximo local dado por la ley de Wien (ecuación 5).

La afirmación es falsa. Siempre una distribución de Planck a mayor temperatura tiene una mayor densidad de fotones, a cualquier frecuencia.

3. *a*) Efecto fotoeléctrico y energía solar

   1) En la Tierra el Sol nos provee energía a una tasa de 1400 W/m^2. Dada la distancia al Sol de 150 millones de kilómetros, calcule la masa (en kg) que el Sol convierte en energía en cada segundo.
   El Sol entrega 1400 W/m^2 en toda el área de una esfera de 150$\times 10^6$ kms. de radio centrada en él, que tiene 4 π (150$\times 10^9$)^2 m^2 de área. La energía total por segundo que el Sol entrega será:

   $$1400 \times 4\pi(150 \times 10^9)^2 \quad J/s,$$

   dividiendo por c^2 (usando la equivalencia $E = mc^2$) se obtiene el resultado pedido:$\approx 4{,}4 \times 10^9$ *kg/s.*

   2) Asumiendo luz monocromática amarilla (λ = 550 nm) calcule la energía cinética máxima, $(\mathrm{KE})_{\mathrm{max}}$, de los fotoelectrones removidos de un panel fotoeléctrico de Cesio ($\phi = 1{,}9$ eV).
   Usamos la fórmula vista en clases para el efecto fotoeléctrico:

   $$KE_{max} = hc/\lambda - \phi$$

   y obtenemos KE_{max}=0.36 eV

   3) Si el panel tiene un área de 1 m^2 y una eficiencia cuántica de 1 %, ¿cuál es la corriente (en fotoelectrones por segundo) que puede producir?
   La eficiencia cuántica nos dice cuantos fotones de hecho interactúan sacando un fotoelectrón. El número de fotones que impacta la placa por segundo, usando los datos anteriores es:

   $$\frac{1400\lambda}{hc} \quad s^{-1}$$

   de éstos , sólo el 1 % sacará un fotoelectrón, por ende se produce una corriente de $\approx 3{,}88 \times 10^{19}$ *fotoelectrones/s.*

   4) Para un metal se usó luz de dos frecuencias, ν, para medir la energía cinética máxima de los fotoelectrones: para $\nu = 1{,}0 \cdot 10^{15}$ Hz se obtuvo $(\mathrm{KE})_{\mathrm{max}} = 1{,}0$ eV y para $\nu = 1{,}1 \cdot 10^{15}$ Hz se obtuvo $(\mathrm{KE})_{\mathrm{max}} = 1{,}4$ eV. Calcule la constante de Planck estableciendo claramente los pasos (Coef. 2).
   Usamos la ecuación para el efecto fotoeléctrico aplicado a ambos casos:

   $$\begin{aligned} 1\, eV &= h(1 \times 10^{15}\, hz) - \phi \\ 1{,}4\, eV &= h(1{,}1 \times 10^{15}\, hz) - \phi \end{aligned} \tag{6}$$

   restamos ambas ecuaciones y despejamos h, de donde $h = 4{\times}10^{-15}$ eV s=6,4$\times 10^{-34}$ J s.

   b) Rayos-x

   1) El ángulo de difracción más pequeño para el Cloruro de Potasio (KCl) es 28.4^o para rayos-x de 0.30 nm. Calcule la distancia entre los planos atómicos del KCl.

El ángulo de difracción más pequeño corresponde a $n = 1$. Aplicamos la fórmula de de difracción de Bragg donde d es la separación entre los planos atómicos:

$$2d \operatorname{sen} 28{,}4^\circ = 0{,}3\, nm \tag{7}$$

Se obtiene $d = 0{,}315$ nm.

2) En el efecto fotoeléctrico inverso, demuestre que

$$\lambda_{\mathrm{min}} = \frac{1{,}24\ 10^{-6}}{V}[\mathrm{Vm}] \tag{8}$$

explicando los términos, las unidades y calculando la constante a partir de constantes fundamentales [Coef. 2]. *En el efecto fotoeléctrico inverso, se asume que la máxima energía que un electrón puede radiar es la energía que gana en el potencial V. Así:*

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda_{min}} &= eV \\ \Rightarrow \lambda_{min} &= \frac{hc}{eV} \\ &\approx \frac{1{,}24\ 10^{-6}[Vm]}{V} \end{aligned} \tag{9}$$

Todas las cantidades en MKS, voltaje en Volts (Joule/Coulomb) y carga en Coulombs.

3) ¿Qué voltaje de debe aplicar a un tubo de rayos-x para que emita rayos-x con una longitud de onda mínima de 0.3 nm?
Aplicamos la ecuación anterior para despejar V y obtenemos 4133 [V].

c) Espectro electromagnético

1) Si se unen los extremos de una pila de 1.5 V con un cable de resistencia cero, los electrones que hay en exceso en el lado negativo de la pila viajarán al lado positivo, e impactarán el extremo de la pila, perdiendo su energía en el choque. Suponiendo que toda esta energía se radía, ¿usted tendrá una linterna ultravioleta, visible o infrarroja? ¿Y si pone 2 pilas en serie? (NB: Rango visible: 400 a 700 nm)
Usamos la ecuación (8), los fotones radiados tendrán la máxima energía al perderla toda en el choque final. Recordar que al poner dos pilas en serie, el voltaje se suma:

$$\begin{array}{lll} \textit{1.5 V en } (8) \Rightarrow & \textit{826.7 nm} \Rightarrow & \textit{infrarrojo} \\ \textit{3.0 V en } (8) \Rightarrow & \textit{413.3 nm} \Rightarrow & \textit{visible} \end{array}$$