Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Pauta Control 1 FI34A-03

Física Contemporánea

Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Pablo Castellanos
Andrés Guzmán

27 de agosto de 2007

1. *a*) ¿Para qué rango de velocidades son válidas las transformaciones de Lorentz? [1 línea]
   Para el rango $0 < v < c$.

   b) El espectro de un cuásar muy lejano, muestra una línea de Hidrógeno a $\lambda = 2430$ Å, que corresponde a una linea conocida en los laboratorios terrestres a $\lambda = 1215$ Å. ¿Cuál es la velocidad del cuásar con respecto a la Tierra? [2 lineas]
   Del efecto Doppler relativista: $2430/1215 = \sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$, *de lo cual se despeja:* $v = 0{,}6c = 180\,000$ $km\ s^{-1}$

   c) Explique la siguiente contradicción (sin usar fórmulas): una partícula se envía con una velocidad $c/2$ en una dirección dada (un experimento factible), mientras que al mismo tiempo otra se envía con velocidad $c/2 + 1$ km/s en exactamente la dirección contraria. La velocidad relativa entre ambas partículas parece ser mayor (en 1 km/s) que la velocidad de la luz c, lo que contradice uno de los principios de la Relatividad Especial [2 líneas]
   Para encontrar la velocidad relativa hay que situarse en el sistema de referencia de una de las partículas, y medir la velocidad de la otra. La composición de velocidades da $v_{total} = (4/5)c$.

   d) Un vuelo tripulado a Marte (en 2018) tardará 1 año (según se observará desde la Tierra), pero la nave sólo permitirá cargar comida y combustible para 11 meses. ¿A qué velocidad en términos de c deberá viajar la nave para que sus tripulantes puedan alimentarse? (no considere el viaje de vuelta) [1 linea]
   Por dilatación del tiempo: $11/12 = \sqrt{1 - (v/c)^2}$, *de donde se despeja* $v = 119896$ $km\ s^{-1}$.

   e) Dibuje una trayectoria de luz en un diagrama espacio-tiempo uno de cuyos ejes es ct.
   Es una recta con pendiente uno (es fundamental que esté señalado el ángulo de 45^o*.)*

   f) A Ud. le quieren vender un chip ultra-rápido de 300.000 GHz que mide 1 cm. Diga si lo compraría y explique la razón. [max 2 frases]
   No es posible que alguna señal recorra 1 cm en un tiempo de $1/(3\ 10^{14})$ *s.*

2. Un rayo de luz rebota entre dos espejos paralelos, separados por una distancia d. El período propio de este"reloj" está definido por el intervalo entre dos rebotes consecutivos de un fotón en el mismo espejo, en el sistema de referencia en que los espejos están en reposo. Calcule el periódo por un observador que se mueve con velocidad constante, $\vec{V}$, respecto de este reloj en los dos siguientes casos:

   a) Si $\vec{V}$ es paralelo a los espejos.

   b) Si $\vec{V}$ es perpendicular a los espejos.

En ambos casos se pide comparar el intervalo de tiempo medido entre dos eventos, vale decir, la emisión y la llegada del rayo de luz a un mismo espejo). En el sistema de referencia en reposo respecto a los espejos, este intervalo es $2d/c$. *Tanto en la parte 2*a *como en la 2*b, *el intervalo que un observador en movimiento medirá está dilatado en un factor* $\gamma = (1 - V/c)^{-1/2}$ *y por ende vale:*

$$\frac{2d}{c}\gamma \quad ,$$

en ambos casos.

Si se quiere, los eventos relevantes medidos desde el sistema de referencia de los espejos (en coordenadas (ct, x, y)*) son:*

$$E_{emisión} = (0, 0, 0)$$
$$E_{rebote\ 1} = (d, d, 0)$$
$$E_{rebote\ 2} = (2d, 0, 0),$$

el evento importante es $E_{rebote\ 2}$*, que, aplicándole la transformación de Lorentz queda* $(2d\gamma, 0, 0)$*, no importando si* $\vec{V}$ *va en la dirección* $\hat{x}$ *o en la dirección* $\hat{y}$*.*

3. Considere una nave espacial viajando a velocidad V y un asteroide ubicado en su rumbo.

   a) La nave detecta el asteroide por medio del rebote de una onda electromagnética. Según el sistema de referencia de la nave ¿cuál es la razón entre los tiempos de ida y de vuelta de la onda? Justifique.

   Según el sistema de referencia de la nave, es el asteroide el que se viene acercando ella. El rebote de la onda electromagnética es instantáneo y por ende la distancia recorrida por ésta es igual de ida como de vuelta. La razón de tiempos pedida es 1.

   b) La nave envía un proyectil a velocidad U respecto de ella para destruir el asteroide. El asteroide por su parte, no será afectado por un impacto que le llegue a una velocidad inferior a V_a. Determine U necesario para destruir el asteroide.

   Simplemente usamos la ley de composición de velocidades, como para el asteroide la nave se mueve con velocidad positiva, se utilizan signos negativos para la velocidad relativa:

$$U = \frac{V_a - V}{1 - VV_a c^2}$$

   c) El proyectil rompió al asteroide en varios pedazos, y la idea es que la nave pase entre ellos sin peligro. Para ello es suficiente que *después* del impacto transcurra, en el sistema de referencia del asteroide, un *tiempo de dispersión de escombros* Δt_d. Determine la distancia mínima (medida desde el asteroide) a la cual la nave tuvo que haber estado cuando lanzó el proyectil para alcanzar a cruzar sin peligro los escombros. Determine esta misma distancia mínima pero medida desde la nave.

   En el sistema de referencia del asteroide, vemos que la situación crítica será cuando el tiempo de vuelo del misil (lanzado a una distancia d) más el tiempo de dispersión sea igual al tiempo que la nave demora en recorrer la misma distancia.

$$\frac{d'_{min}}{V_a} + \Delta t_d = \frac{d'_{min}}{V}$$
$$\Delta t_d = d'_{min}\frac{V - V_a}{VV_a}$$
$$d'_{min} = \Delta t_d \frac{VV_a}{V_a - V}$$

   En el sistema de la nave, el tiempo de dispersión será $\gamma\Delta t_d$*, por la dilatación temporal y nuevamente el caso crtico será cuando el asteroide alcance precisamente a recorrer la distancia en el mismo* *tiempo que el misil vuela hacia él y se alcance a desintegrar. Sin embargo en este caso el encuentro del asteroide y el misil no se producirá cuando el misil recorra d'_{min}, si no que cuando el misil recorra una distancia d y el asteroide una distancia $d'_{min} - d$.*

$$\frac{d}{U} = \frac{d'_{min} - d}{V}$$
$$d = U\frac{d'_{min}}{U+V}$$

Ahora en la ecuación:

$$\frac{d_{min}}{U+V} + \gamma\Delta t_d = \frac{d_{min}}{V}$$
$$d_{min} = \gamma\Delta t_d\frac{(U+V)V}{U}$$

Además por las contracciones de Lorentz tenemos que:

$$d_{min} = d'_{min}/\gamma$$

Que es otro método de obtener la distancia según la nave.

d) Una vez que ha pasado el peligro, los tripulantes se preguntan:"Cuando la señal de radar descrita en (3*a*) llegó de vuelta a la nave, en ese mismo instante nosotros enviamos el proyectil. Según nosotros, estos dos eventos (la vuelta de la señal y el disparo del proyectil) entonces son simultáneos."¿Qué puede decir respecto a la simultaneidad de estos eventos según el sistema de referencia del asteroide? (max. dos líneas).

En el sistema del asteroide los eventos también sern simultáneos pues, tomando t'_1 ' y t'_2 como los tiempos de ambos eventos en el sistema del asteroide tenemos:

$$t'_1 = \gamma(t_1 + Ux_1/c^2)$$
$$t'_2 = \gamma(t_2 + Ux_2/c^2)$$

Pero $t_1 = t_2$ y $x_1 = x_2$, por lo tanto $t'_1 = t'_2$, y los eventos son simultáneos.

4. Considere un evento desplazándose a velocidad V . Demuestre a través de la fórmula de adición de velocidades que:

a) 1) Si $|V| = c$, entonces $|V| = c$ medido desde cualquier otro sistema de referencia.

Consideremos un sistema secundario moviéndose a velocidad $\vec{u}$, respecto del cual se calculara la velocidad relativa. En todo el problema hay dos direcciones importantes: una definida por el movimiento del evento que tiene velocidad V y la otra por el movimiento del sistema de referencia secundario, por lo que puedo asumir que V está dirigida en la dirección $\hat{x}$ y la velocidad $\vec{u}$ está en el plano xy ($\vec{u} = (u_x, u_y)$). Defino además $\mu_x = u_x/c$ y $\mu_y = u_y/c$. Como se vio en clases, la velocidad del evento visto desde el sistema secundario cumple:

$$(\beta'_x, \beta'_y) = \left(\frac{V'_x}{c}, \frac{V'_y}{c}\right) = \left(\frac{\beta - \mu_x}{1 - \beta\mu_x}, \frac{-\mu_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\mu_x}\right)$$

Debemos calcular $\left(\frac{V'_x}{c}\right)^2 + \left(\frac{V'_y}{c}\right)^2$ y compararlo con 1.

$$\beta'^2 = \left(\frac{\beta - \mu_x}{1 - \beta\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{-\mu_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\mu_x}\right)^2 = 1 - \frac{(1-\mu^2)(1-\beta^2)}{(1-\mu_x\beta)^2} \tag{1}$$

con $\mu^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 < 1$.
La demostración pedidad corresponde al caso particular $\beta = 1$ en la ecuación 1.

2) Si $|V| < c$, entonces $|V| < c$ medido desde cualquier otro sistema de referencia.
Corresponde al caso particular $\beta^2 < 1$ *en la ecuación 1. Reemplazando se ve que* $\beta'^2 < 1$.

3) Si $|V| > c$, entonces $|V| > c$ medido desde cualquier otro sistema de referencia.
Corresponde al caso particular $\beta^2 > 1$ *en la ecuación 1. Reemplazando se ve que* $\beta'^2 > 1$. *Notar que puede existir un* β *específico respecto del cual* $(1 - \mu_x\beta)^2 = 0$, *anulándose el denominador y haciendo* β' *infinito. Corresponde a un sistema particular en que el evento "viaja" en el plano de simultaneidad, es decir, todas sus posiciones corresponden al mismo tiempo, de donde sale su rapidez infinita. Claramente no puede representar la posición de ningún objeto físico.*

b) Considere ahora dos eventos E_1 y E_2 cuyas coordenadas temporales y espaciales (unidimensionales) son , respectivamente, (t_1, x_1) y (t_2, x_2). Demuestre que:

1) Si $(t_2 - t_1) > 0$ y $|x_2 - x_1| \leq c(t_2 - t_1)$, entonces $(t_2 - t_1) > 0$ medido desde cualquier otro sistema de referencia.
Aplicando las transformaciones de Lorentz, tenemos que los eventos medidos desde un sistema en movimiento cumplen:

$$(ct'_2, x'_2) = \gamma(ct_2 - \beta x_2, x_2 - \beta\, ct_2)$$
$$(ct'_1, x'_1) = \gamma(ct_1 - \beta x_1, x_1 - \beta\, ct_1),$$

con $|\beta| < 1$.
La diferencia de tiempos medida desde otro sistema de referencia es:

$$\begin{aligned} ct'_2 - ct'_1 &= \gamma(ct_2 - ct_1 - \beta(x_2 - x_1)) \\ &\geq \gamma(ct_2 - ct_1 - |\beta||x_2 - x_1|) \\ &> \gamma(c(t_2 - t_1) - |x_2 - x_1|) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

la última desigualdad dada por las hipótesis.

2) Si $(t_2 - t_1) < 0$ y $|x_2 - x_1| > c|t_2 - t_1|$, entonces existe algún otro sistema de referencia respecto del cual $(t_2 - t_1) > 0$.

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma(ct_2 - ct_1 - \beta(x_2 - x_1))$$

, elijo β *con el signo contrario a* $(x_2 - x_1)$, *de donde:*

$$ct'_2 - ct'_1 = \gamma(c(t_2 - t_1) + |\beta||x_2 - x_1|),$$

la última expresión es mayor que cero dadas las hipótesis eligiendo β *tal que:* $1 < |\beta| < \frac{c|t_2 - t_1|}{|x_2 - x_1|}$.

3) Basado en sus respuestas de los dos puntos anteriores, ¿cuándo es *imposible* afirmar que un evento es *causa* de otro?.
Una condición necesaria esencial para poder decir que un evento es causa de otro, es que el primero (la causa) ocurra antes en el tiempo que el segundo (la consecuencia). En el segundo de los casos analizados vemos que no se puede ordenar en el tiempo ambos eventos de manera consistente respecto a cualquier sistema inercial, por lo que es imposible establecer una relación causa-consecuencia entre ellos. La condición matemática se interpreta como que un rayo de luz no alcanza a "conectar" ambos eventos.
Si un rayo de luz no alcanza a viajar entre dos eventos, ellos no pueden ser ordenados en el tiempo de manera independiente con respecto a cualquier sistema inercial , ni pueden estar relacionados como causa-consecuencia.