Guía de Relatividad Especial para el Control 1

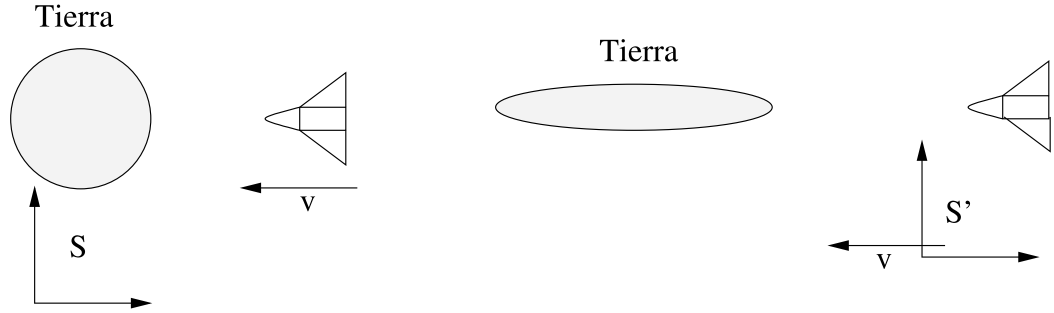
Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Pablo Castellanos
Andrés Guzmán

16 de agosto de 2007

1. Ud. es un observador estacionario en el sistema de laboratorio. Sus coordenadas espaciales son: $x = 6$ m, $y = 8$ m y $z = 0$ m. En esa posición está ubicado un reloj estacionario en el sistema de laboratorio. Ud. desea sincronizar este reloj con uno ubicado en el origen del sistema de referencia de laboratorio, utilizando para ello un pulso de luz. Describa en detalle y con números el procedimiento que utilizará.

2. *a*) ¿Qué pretendió medir el experimento de Michelson-Morley?
   b) ¿Cuál fue el resultado?
   c) ¿Qué conclusión se desprende de tal resultado?
   d) Nombre los dos postulados en los que se basa la Relatividad Especial.
   e) ¿Para qué rango de velocidades son válidas las transformaciones de Lorentz?
   f) Nombre un experimento en donde se aprecian y sean importantes las consecuencias de la Relatividad Especial.

3. Que velocidad debería tener un observador que pasara cerca de la Tierra, para observar que ella es una elipse cuyos ejes tengan una proporción 6 : 1. Suponga que la Tierra es perfectamente esférica.



4. En un sistema inercial S se encuentra una barra en reposo, de largo natural l_0, la cual forma un ángulo θ con respecto al eje x del sistema S. En otro sistema inercial, S', el cual tiene una velocidad $\vec{v} = v\hat{x}$ con respecto a S se observa la barra inclinada con un ángulo θ', con respecto al eje x' (Figura 1).

   a) Demuestre que la relación entre los ángulos θ y θ' está dada por

   $$\tan\theta = \gamma^{-1}\tan\theta' \ .$$

   b) Muestre que la longitud de la barra medida por un observador en reposo en el sistema S' es

   $$l = l_0\left[\frac{\cos^2\theta}{\gamma^2} + \sin^2\theta\right]^{1/2} \ .$$

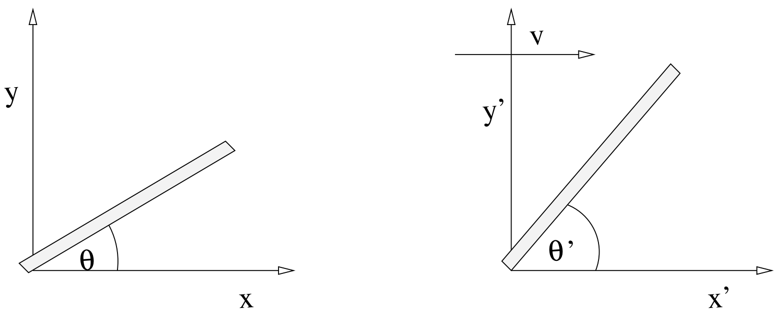
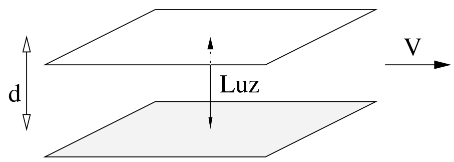


Figura 1:

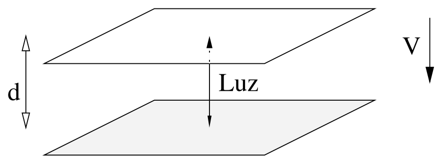
5. Un rayo de luz rebota entre dos espejos paralelos, separados por una distancia d. El periódo propio de este"reloj" está definido por el intervalo entre dos rebotes consecutivos de un fotón en el mismo espejo, en el sistema de referencia en el que los espejos están en reposo.
   Calcule el periódo por un observador que se mueve con velocidad constante, $\vec{V}$, respecto de este reloj en los dos siguientes casos:

   a) Si $\vec{V}$ es paralelo a los espejos.



   b) Si $\vec{V}$ es perpendicular a los espejos.

6. Una partícula inestable, cuya vida media propia es $\tau = 5 \times 10^{-8}$ [s], está ubicada a una distancia d del plano yz y se acerca a éste con velocidad $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}c\hat{x}$. Observadores en reposo con respecto al plano yz verifican que esta partícula colisiona contra el plano antes de desintegrarse. Calculé el valor máximo que puede tomar d para que ocurra la colisión.

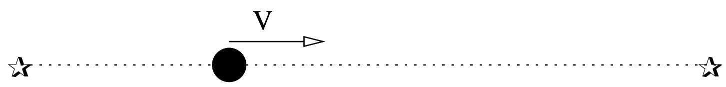


7. En el sistema de referencia S, un cuerpo rígido de volumen propio V_0, se desplaza con una velocidad constante $\vec{u} = U\hat{x}$.
Un observador en el sistema S', el cual se desplaza con velocidad constante $\vec{V} = V\hat{x}$ con respecto al sistema S, intenta medir el volumen que ocupa el cuerpo en movimiento.
Demuestre que la relatividad especial predice el valor:

$$V_0 \frac{\sqrt{(c^2 - V^2)(c^2 - U^2)}}{c^2 - UV} \ .$$

8. Una galaxia se aleja de la Tierra con una velocidad tal que cada onda electromagnética que es emitida desde la galaxia es detectada en la Tierra con una longitud de onda igual al doble de la emitida en por la galaxia, $\lambda = 2\lambda_0$, donde λ_0 es la longitud de onda que es medida por un observador en reposo con respecto a la galaxia. Calcule la velocidad de la galaxia relativa a la Tierra.

9. Un observador se encuentra entre dos fuentes estacionarias de luz, las cuales emitén con la misma frecuencia. ¿Cuán rápido debe moverse el observador hacia una de las fuentes para que las frecuencias medidas por él difieran en un factor 2?.



10. Dos naves espaciales, de longitud propia L_0, avanzan en sentido opuesto, a velocidad $v = \sqrt{3}c/2$, relativa entre las naves. Estas naves pasarán a una distancia d ($d \ll L_0/20$) como se muestra la figura 2.

    El observador, O, lleva un cañon en su nave, el cual apunta en dirección perpendicular a la dirección del movimiento relativo, y dispara proyectiles que viajan a una velocidad 0,99c; esta poderosa arma va en la parte trasera de la nave. El artillero de la nave O dispara el cañon en el momento exacto en que la punta de su nave coincide con la cola de la otra nave, O' en la figura 3(a), a la cual llama nave enemiga.

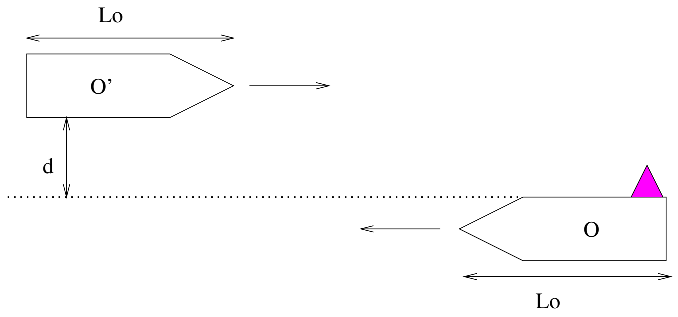
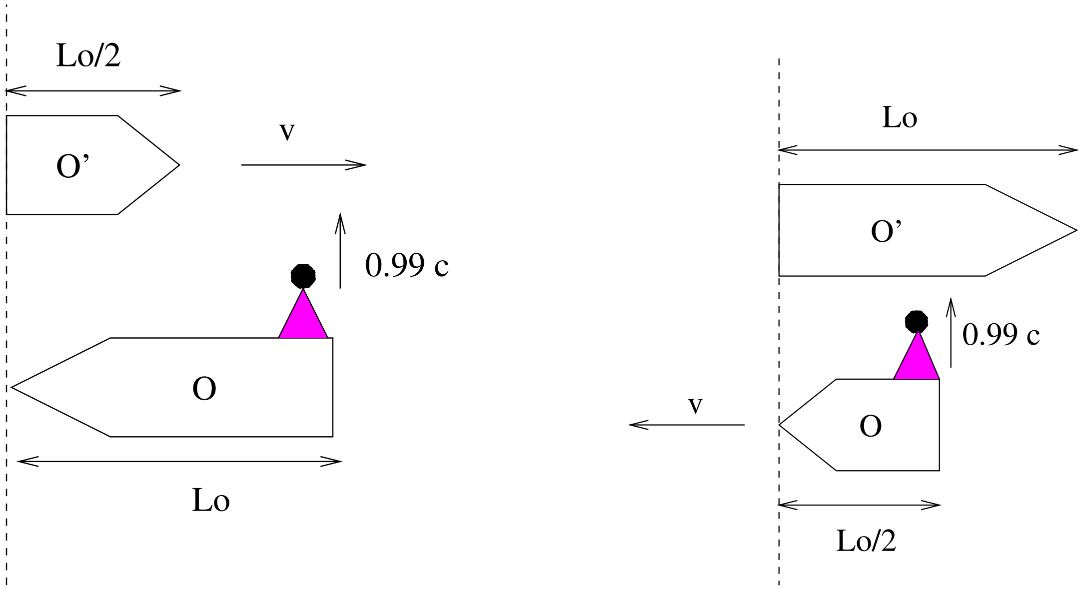


Figura 2: Problema 10. Escenario de Combate.



(a) Razonamiento de O. (b) Razonamiento de O'.

Figura 3: Problema 10.

Una vez disparado el canõn, el artillero se da cuenta que sería imposible destruir la nave O', puesto que cometió un error: debido a la contracción de Lorentz, la nave O' es mas corta. *DEMUESTRE que según el observador O, la nave O' mide $L_0/2$.*

Esto es un hecho. El error del artillero fue que, debido a la contracción de Lorentz y a la corta distancia (d) que separa a las naves, el proyectil nunca alcanzará a O' pues, cuando el extremo de la nave O' intersecte la ruta del proyectil, este ya habría pasado.

Sin embargo, el observador O', ha entrado en estado de pánico, pues ha razonado de la siguiente manera: La nave O (la nave enmiga según O') es mas corta debido a la contracción de Lorentz y de hecho mide $L_0/2$. *DEMUESTRE esta afirmación.*

Por lo tanto, razona O', cuando el extremo de la nave O coincide con el final de O' y se dispara el cañon, entonces, el mortal proyectil tendrá tiempo suficiente para cubrir la corta distancia, d, que separa a las naves y será hombre muerto, ver figura 3(b).

¿Impactará el proyectil a O'? Justifique su respuesta cuidadosamente. Puesto que hay una sola respuesta posible, una de las figuras no corresponde a lo que sucederá. ¿Cuál refleja lo que no sucede?

11. Una varilla de longitud $L \gg 1$, esta dispuesta de tal manera que forma un ángulo θ con el eje x de un sistema de coordenadas cartesiano usual (el eje y está en la dirección vertical). Sea B el punto de intersección de la varilla con el eje x. La varilla se mueve sin rotar y con velocidad constante $\vec{V} = -V\hat{y},\ V > 0$.

    Calcule la velocidad con que avanza el punto B. Demuestre que si $V = c/3$, entonces existe un valor de θ a partir del cual B avanza con velocidad mayor que la velocidad de la luz. ¿Contradice esto los postulados de la relatividad especial? ¿Por qué?

12. Un electrón (e^-) y un positrón (e^+) se viajan juntos y en la misma dirección a velocidad $\vec{v} = 0{,}5c\,\hat{x}$ respecto de un sistema de laboratorio $\mathcal{L}$ justo antes de aniquilarse para dar paso a dos fotones gamma. En el sistema en el cual el electrón y el positrón están en reposo (sistema $\mathcal{K}$), los fotones se emiten en direcciones opuestas en un eje ($\pm z^{'}$) *perpendicular* al definido por las velocidades de las partículas iniciales ($+x^{'}$).

    a) ¿En el sistema de laboratorio $\mathcal{L}$, cuál es el ángulo θ que forman las velocidades de los fotones ?

    Hint: Use suma de velocidades y pregúntese cuáles son las velocidades del fotón en el sistema $\mathcal{L}$ y en el sistema en reposo relativo $\mathcal{K}$.

    $$V_x = \frac{(V_x^{'} + U)}{1 + \frac{V_x^{'}U}{c^2}} \qquad V_z = \frac{V_z^{'}\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}{1 + \frac{V_x^{'}U}{c^2}}\ .$$

    b) ¿En el sistema de laboratorio, cuál es la relación entre las longitudes de onda emitidas en $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$?

13. Para 2 sistemas en movimiento relativo sólo según su eje X: explique por qué se dan las igualdades $y = y'$ y $z = z'$, pero no se dan las igualdades $V_y = V_y'$ y $V_z = V_z'$. [Máximo 2 frases]

14. Una barra de largo propio L_0 lleva una pequeña luz verde en un extremo y una roja en el extremo opuesto. La barra se mueve con velocidad v relativa a un sistema inercial asumido en reposo. Un pequeño proyectil es disparado con velociad u, relativa a la barra, desde la posición donde se encuentra la luz verde hacia la luz roja (evento A). Cuando el proyectil alcanza la luz roja, ésta se enciende (Evento B).

    a) ¿Cuál es el intervalo de tiempo en el sistema de la barra *b*) Usando **transformaciones de Lorentz** determine el intervalo de tiempo entre estos dos eventos medido desde el sistema inercial asumido en reposo.

c) Reemplace ahora el proyectil por un fotón de modo que ahora $v \to c$. Si el experimento se repite periódicamente, "*disparando*" fotones a intervalos de $\Delta\tau$, defina una frecuencia de emisión y deduzca el efecto Doppler midiendo ésta en ambos sistemas de referencia.

15. Un protón (p^+) y un pión con carga negativa (π^-) parten del reposo a una cierta distancia. Debido a que tienen cargas opuestas, estas partculas se atraen y colisionan, obtenindose como resultado un protn y n piones (Existen piones de carga negativa, positiva y nula).

$$p + \pi^- \to p + n\pi^-$$

Considere que al momento del choque el π^- incidente ha alcanzado un momentum P_π. En lo que sigue, NO considere cargas eléctricas.

a) ¿Cunto vale el momentum P_p del protón justo antes de la reacción?. Escrbalo en función de P_π.

b) Después de la reacción, Cuál es la condición sobre los momentums de los piones y el protón que maximiza la cantidad n de piones resultantes? Justifique.

c) Determine el número máximo de piones que se pueden producir en esta reacción como función de P_π y las masas de las partículas involucradas.

d) La energía en reposo de un protón es $938[MeV]$ y la de un pión es de $140[MeV]$. Evalúe la cantidad n máxima para el caso en que al instante del encuentro el pión incidente ha alcanzado una velocidad $v = 0{,}995c$. Hint: Mantenga las unidades en MeV.

16. *a*) El espectro de una galaxia lejana, muestra una línea de Hidrógeno a $\lambda = 1280\mathring{A}$, que corresponde a una línea conocida en los laboratorios terrestres a $\lambda = 1215\mathring{A}$. ¿Cuál es la velocidad de la galaxia con respecto a nosotros?

b) La Ley de Hubble, descubierta observacionalmente en el ao 1929 por Edwin Hubble, muestra que las galaxias se alejan unas de otras a velocidad proporcional a su distancia. La ley de Hubble se enuncia como sigue:

$$v = H_0 D$$

Con v: velocidad de la galaxia con respecto al observador; D: Distancia al observador en $Ma.l.$ (donde 1 $Ma.l.$ es un millón de años luz); H_0: constante de Hubble ($H_0 = 20$ $[Kms^{-1}/(Ma.l.)^{-1}]$).

¿Cuál es la distancia, en años luz, a la galaxia mencionada anteriormente?

c) Una nave espacial, viaja a esta lejana galaxia a velocidades relativistas. Lleva combustible equivalente a 9999/10000 de su masa total. Calcule la velocidad que alcanza la nave si es completamente eficiente, o sea todo el combustible lo convierte en energía.

d) Cuánto tiempo le tomaría a la nave llegar a esta lejana galaxia, medido desde un reloj en reposo con respecto a la nave?