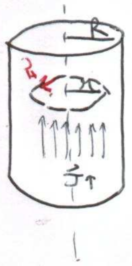
- 2) Considere dos segmentos rectos cargados con densidad lineal de carga λ c/u, y de largos L y l. Ambos están siempre paralelos al eje z (ubicados en $x = 0 = y$), el de largo L con su centro en el origen de coordenadas.
  - a) (1.2) Encuentre una forma integral para el trabajo que hay que realizar para traer el segmento de largo l desde el infinito hasta una posición final en que el centro de este segmento está a una distancia d del origen ($d > (L + l)/2$.
  - b) (0.8) Identifique el resultado anterior como una energía potencial almacenada.
- 3) Considere un cilindro conductor de radio R, y de largo infinito. Una corriente I fluye por el conductor. La densidad de corriente está dada por $\vec{j} = j_0\hat{z} = I/\pi R^2\hat{z}$.
  - a) (0.8) Encuentre la densidad de flujo magnético $\vec{B}(\vec{x})$ en todo el espacio.
  - b) (0.8) Encuentre el potencial vector $\vec{A}(\vec{x})$ en todo el espacio. Asuma que $\vec{A} = 0$ en el eje del cilindro. Ayuda: utilice un teorema de cálculo vectorial para relacionar $\vec{A}$ con $\vec{B}$.
  - c) (0.4) Verifique que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Rotor en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = (\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z})\hat{\rho} + (\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho})\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi})\hat{z}$$

Pauta P3 - C2 CABENAVI@ING.UCHILE.CL

a) Para $r<R$



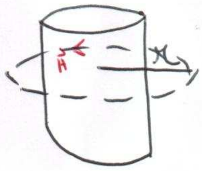
$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

$$H\cdot 2\pi r = J\cdot \pi r^2$$

$$H\cdot 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 \Rightarrow H = \frac{I r}{2\pi R^2} \Rightarrow B = \mu_0 H \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r\,\hat{\theta}$$

(0.4 puntos)

Para $r>R$



$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

$$H\cdot 2\pi r = \frac{I}{\cancel{\pi R^2}}\cdot \cancel{\pi R^2} \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\theta}$$

(0.4 puntos)

b) Para hacer la parte b) conviene saber apriori la dirección de $\vec{A}$.
Haciendo la parte c) primero:

c) $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

Para $r<R$ ↱ ocupo solo la componente según $\hat{\theta}$ del rotor de $\vec{A}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r\,\hat{\theta} = \left(\underbrace{\frac{\partial A_r}{\partial z}}_{=0} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\frac{r^2}{2} + cte$$

$$\Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2 + cte$$

En $r=0$ $A=0$ $\Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_z\,\hat{z} \Leftrightarrow \vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2\,\hat{z}$$

(0.2) puntos

Para $r > R$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\theta} = \left(\cancelto{0}{\frac{\partial A_r}{\partial z}} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}$$

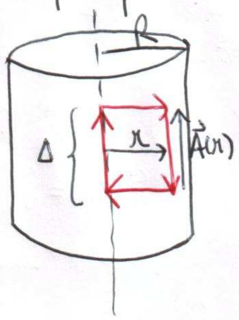
$$\Rightarrow \quad \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r) + cte$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} = A_z\,\hat{z} = \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r) + cte\right)\hat{z}$$ (0.2 puntos)

ahora volvemos a la parte b) ya que sabemos que $\vec{A}$ apunta en la dirección $\hat{z}$

b) Para $r < R$

Se cumple que $\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \phi$ = flujo (0.3 puntos)



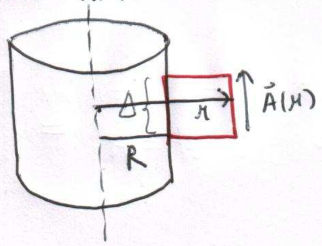
Para la trayectoria de la figura

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \phi = \int_0^{\Delta}\int_0^{r} \underbrace{\left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\right)}_{B} dr\,dz$$

$$\underset{\text{en el eje}}{0}\cdot\Delta - A(r)\cdot\Delta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\cdot\Delta\left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^r\right]$$ (0.3 puntos)

$$-A(r)\cdot\cancel{\Delta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot\cancel{\Delta} \quad \Rightarrow \quad A(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}r^2$$

Para $r > R$



$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_0^{\Delta}\int_R^{r}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)dr\,dz$$ (0.2 puntos)

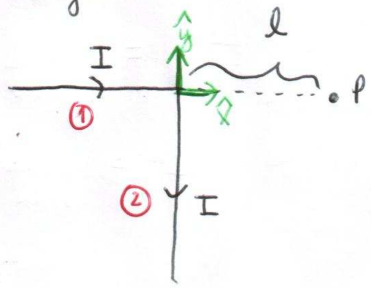
$$A(R)\cdot\Delta - A(r)\cdot\Delta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\Delta\left[\ln(r) - \ln(R)\right]$$

$$\Rightarrow A(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r)\ \overbrace{-\ \underset{\text{calculado con A de } r<R}{A(R)} + \frac{\ln(R)\cdot\mu_0 I}{2\pi}}^{cte}$$

3

CABENAV@ING.UCHILE.CL

Pauta MINI-Ejercicio



Calcular $\vec{B}$ en el punto P

Por principio de superposición, el campo $\vec{B}$ en el punto P se puede calcular como la suma del campo producido por ① y ②

Para ①:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{l} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}$$

$$\left.\begin{aligned} d\vec{l} &= dx\,\hat{x} \\ \vec{r} &= l\,\hat{x} \\ \vec{r}\,' &= x\,\hat{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I\,dx\,\hat{x} \times \frac{(l\hat{x} - x\hat{x})}{(l-x)^3} \qquad \hat{x}\times\hat{x} = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$$

Para ②:

$$\left.\begin{aligned} d\vec{l} &= dy\,\hat{y} \\ \vec{r} &= l\,\hat{x} \\ \vec{r}\,' &= y\,\hat{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{-\infty} I(dy\,\hat{y}) \times \frac{(l\hat{x} - y\hat{y})}{(l^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{-\infty} \frac{I \cdot l\,dy}{(l^2+y^2)^{3/2}}(-\hat{k}) = \frac{I\cdot l\cdot \mu_0}{4\pi}\int_0^{-\infty}\frac{dy}{(l^2+y^2)^{3/2}}(-\hat{k})$$

Cambio de variable $y = l\,tg\theta$

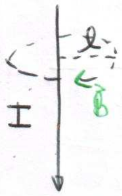
$dy = l\sec^2\theta\,d\theta$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I l}{4\pi}\int_0^{-\pi/2}\frac{l\sec^2\theta\,d\theta}{(l^2+l^2\,tg^2\theta)^{3/2}}(-\hat{k}) = \frac{\mu_0 I l}{4\pi}\int_0^{-\pi/2}\frac{l\sec^2\theta\,d\theta}{l^3\sec^3\theta}(-\hat{k})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi\cdot l}\int_0^{-\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi l}\left[\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{-\pi/2}\right](-\hat{k}) = \frac{\mu_0}{4\pi l}\hat{k}$$

④

Para (2) también se podía ocupar



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$H 2\pi l = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi l} \Rightarrow B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}$$

Pero como se trataba de un alambre que se inicia en O:

$$\underbrace{B = \frac{B'}{2}}_{\text{la mitad !!}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi l} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}\hat{k}$$

EJERCICIO 4
ELECTROMAGNETISMO

Profesor R. Arias

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Jueves 25 de Octubre, 2007, Duración 1:30

- 1) (4) Escriba la expresión para la fuerza que actúa en un elemento de corriente en la presencia de una densidad de flujo magnético $\vec{B}$. Un alambre conductor rígido, en la forma de un loop plano de área A, lleva una corriente I. Use la expresión anterior para encontrar el torque que es necesario aplicar para mantener el alambre estacionario en un campo $\vec{B}$ uniforme, que forma un ángulo θ con la normal al plano del loop.
- 2) (2) Un loop circular de radio a lleva una corriente I. Tome ejes cartesianos con origen en el centro del loop, y con el eje z perpendicular al plano del loop. Use la ley de Biot-Savart para demostrar que la densidad de flujo magnético en $(0, 0, z)$ es $(0, 0, B)$, con B dado por:

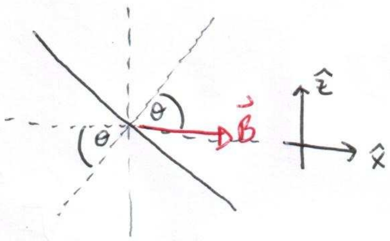
$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

5

Ejercicio 4 P1

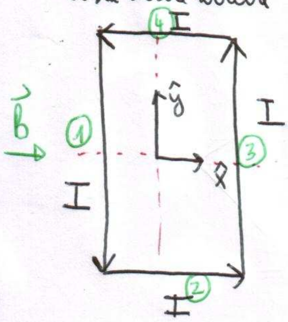
CABENAVI@ING.UCHILE.CL

Para una espira cuadrada de lado a:

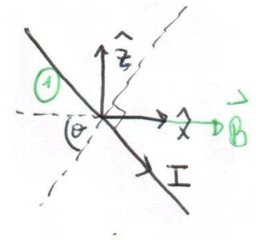


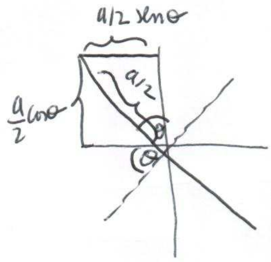
$\vec{B} = B\hat{x}$

vista desde arriba



vista desde lado





Calculemos las fuerzas sobre cada lado:

Para (1):

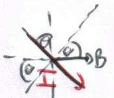
$\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

$$\vec{F}_1 = \int_{\frac{a}{2}}^{-a/2} (I dy\, \hat{y}) \times (B\hat{x}) = IB\left(-\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)(-\hat{z}) = aIB\hat{z}$$

Para (3)

$$\vec{F}_3 = \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} (I dy\, \hat{y}) \times (B\hat{x}) = IB\left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)(-\hat{z}) = -aIB\hat{z}$$

Para (2)



$$\vec{F}_2 = \int_{-\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta}^{a/2 \operatorname{sen}\theta} I\,(dx\,\hat{x} - tg^{-1}\theta\, dx\, \hat{z}) \times B\hat{x}$$

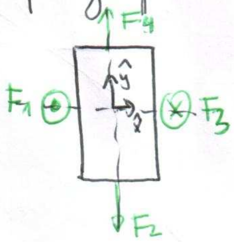
$$\vec{F}_2 = -IB\,tg^{-1}\theta\left(\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta - \left(-\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\right)\hat{y} = -IB\,a\,tg^{-1}\theta \operatorname{sen}\theta\,\hat{y} = -IBa\cos\theta\,\hat{y}$$

Para (4)

$$F_4 = \int_{\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\theta}^{-\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\theta} I\left(dx\,\hat{x} - tg^{-1}\theta\, dx\,\hat{z}\right)\times B\,\hat{x}$$

$$= I B a \cos\theta\, \hat{y}$$

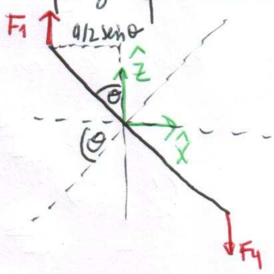
Por lo tanto, las fuerzas apuntan según la figura siguiente:



$$\sum \vec{F} = 0 \quad \text{pero} \quad \sum \tau \neq 0$$

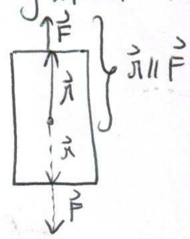
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{con } |\vec{F}| = cte$$

Las únicas fuerzas que hacen torque son F_1 y F_3 ya que $\vec{r}_3 \parallel \vec{F}_3$ y $\vec{r}_4 \parallel \vec{F}_4$



$$\tau_{F_1} = \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\theta\, |F_1|$$

$$\tau_{F_3} = \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\theta\, |F_3|$$



$$\Rightarrow \sum \tau = \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\theta\, a I B + \frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\theta\, I B a$$

$$\Rightarrow \sum \tau = I B a^2 \,\mathrm{sen}\theta$$

$$\sum \tau = I B A_{rea}\, \mathrm{sen}\theta$$

Ejercicio 4 P2]

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I\, d\vec{l} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

$\vec{r} = z\,\hat{z}$

$d\vec{l} = a\, d\theta\ \hat{\theta}$

$\vec{r}\,' = a\,\hat{r}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} I a\, d\theta\ \hat{\theta} \times \frac{(z\,\hat{z} - a\,\hat{r})}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{b} = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a^2\ d\theta}{(z^2+a^2)^{3/2}}}_{I_1} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a z\, d\theta\, \hat{r}}{(z^2+a^2)^{3/2}}}_{I_2}$$

$\hat{r} = \cos\theta\ \hat{x} + \operatorname{sen}\theta\ \hat{y}$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{I a z}{(z^2+a^2)^{3/2}} [\cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{y}]\, d\theta \qquad \int_0^{2\pi} \cos\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}}\, d\theta\ \hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I a^2}{(z^2+a^2)^{3/2}} \cdot 2\pi\ \hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}\ \hat{z}$$