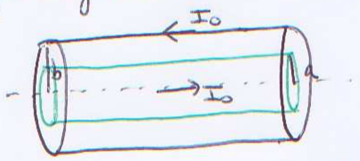
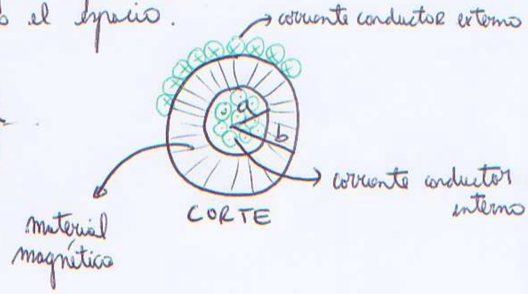
P1] Una línea de transmisión coaxial llena de un material con permitividad no lineal tiene un conductor interno sólido de radio a y un conductor externo muy delgado de radio b.
La curva de magnetización del material de permitividad no lineal se puede aproximar por $B = \dfrac{1,6 \cdot H}{1000 + H}$

Suponiendo que en el conductor interno circula una corriente I_0 hacia la derecha y vuelve en la dirección opuesta por el conductor externo, calcule el campo magnético B en todo el espacio.





Sol:

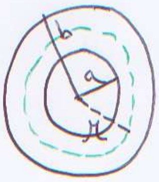
Para $r < a$

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$

$J = \dfrac{I_0}{\pi a^2} \Rightarrow I_{enlazada} = J \cdot \pi r^2 = \dfrac{I_0}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = \dfrac{I_0}{a^2} r^2$

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \dfrac{I_0}{a^2} r^2 \Rightarrow H = \dfrac{I_0 r}{2\pi a^2} \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}$

Para $a < r < b$



$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0$

$H 2\pi r = I_0 \Rightarrow H = \dfrac{I_0}{2\pi r}$

Reemplazo en la curva de magnetización

$B = \dfrac{1,6 \cdot H}{1000 + H} \Rightarrow B = \dfrac{1,6 \cdot \left(\frac{I_0}{2\pi r}\right)}{1000 + \left(\frac{I_0}{2\pi r}\right)}$

Para $r > b$

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \underbrace{I_0}_{\text{conductor interno}} - \overbrace{I_0}^{\text{conductor externo}} = 0 \Rightarrow H = 0 \Rightarrow B = 0$

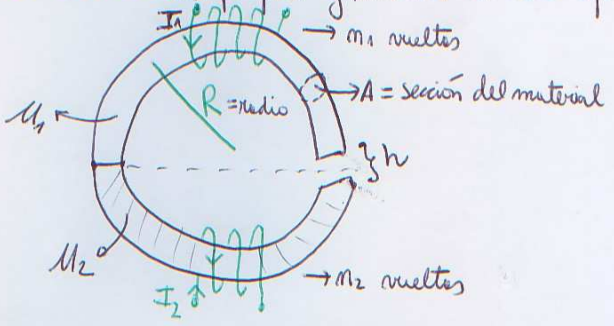
En resumen $\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} r \, \hat{\theta} & r < a \\ \dfrac{1,6 \cdot \left(\frac{I_0}{2\pi r}\right)}{1000 + \frac{I_0}{2\pi r}} \hat{\theta} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$

P2] El circuito de la figura está formado por 2 materiales magnéticos de permeabilidades μ_1 y μ_2 y un entre-hierro de largo h.

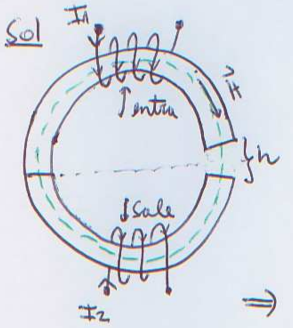
a) Calcule $\vec{B}$ al interior del material

b) Calcule el flujo magnético ϕ

c) Calcule inductancias propias y mutuas de cada espira.



Sol



Para la trayectoria de la figura

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = n_1 I_1 - n_2 I_2$$

entra al plano

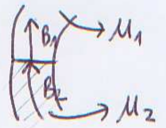
negativo porque sale del plano

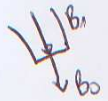
$$\Longrightarrow \quad H_1\left(\pi R - \frac{h}{2}\right) + H_0 h + H_2\left(\pi R - \frac{h}{2}\right) = n_1 I_1 - n_2 I_2 \qquad (*)$$

$B_1 = \mu_1 H_1$

$B_2 = \mu_2 H_2$

$B_0 = \mu_0 H_0$





$B_{1n} = B_{0n}$
$\Rightarrow$
$\vec{B}_1 = \vec{B}_0$

Por condiciones de borde $\quad B_{1n} = B_{2n}$

Pero el campo $\vec{B}$ apunta en la dirección normal en el cambio de medio

$$\Longrightarrow \quad B_{1n} = B_1 = B_2 = B_{2n}$$

$$\therefore \quad B_1 = B_2 = B_0 = B$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B}{\mu_1}$$

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{B}{\mu_2}$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

Reemplazo en (*)

$$\Rightarrow \frac{B}{\mu_1}\left(\pi R - \frac{h}{2}\right) + \frac{B}{\mu_0} h + \frac{B}{\mu_2}\left(\pi R - \frac{h}{2}\right) = n_1 I_1 - n_2 I_2$$

$$\Rightarrow B = \frac{n_1 I_1 - n_2 I_2}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}}$$

b) El flujo magnético es $\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi$

$\vec{B}$ es constante al interior del material

$$\Rightarrow \phi = B \cdot A = \frac{n_1 A I_1 - n_2 A I_2}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}}$$

c) Para la bobina 1 se tiene que el flujo que atraviesa por ella se debe al flujo que produce la corriente I_1 (flujo propio) menos el flujo que produce la bobina 2 pero que atraviesa la bobina 1.

$$\phi_1 = \phi_{1\,propio} + \phi_{MUTUO}$$

$$\phi_{1\,propio} = L_1 I_1 \qquad \text{por definición}$$

$$\phi_{MUTUO} = M I_2$$

Como son n_1 bobinas, se tiene que $\phi_{1\,TOTAL} = n_1 \phi_1$

$$\Rightarrow$$

$$\phi_{1\,TOTAL} = \underbrace{\frac{n_1^2 A}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}}}_{\text{flujo propio}} I_1 - \underbrace{\frac{n_1 n_2 A}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}}}_{\text{flujo mutuo}} I_2$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{n_1^2 A}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}} \qquad M = \frac{n_1 n_2 A}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}}$$

Para la bobina 2

$$\phi_{TOTAL\ 2} = n_2\, \phi$$

$\Rightarrow$

$$\phi_{2\,TOTAL} = \frac{n_2^2 A\ I_2}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}} - \frac{n_1 n_2\ A\ I_1}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}}$$

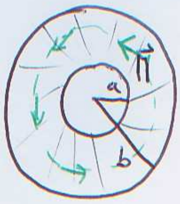
$$\Rightarrow L_2 = \frac{n_2^2 A}{\frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_1} + \frac{h}{\mu_0} + \frac{\left(\pi R - \frac{h}{2}\right)}{\mu_2}}$$

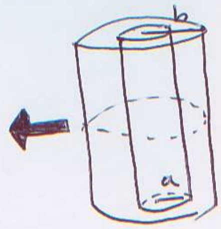
P3] Se tiene un cilindro infinito de radio interno a y radio externo b. Entre a y b hay un material magnético con magnetización constante $\vec{M} = M\hat{\theta}$.

a) Calcule las densidades de corriente en volumen y superficie.

b) Calcule las cargas magnéticas en volumen y superficie

c) Calcule $\vec{B}$ al interior del cilindro





a) Las densidades son:

En volumen $\vec{J} = \nabla \times \vec{M}$

En superficie $\vec{K} = \vec{M} \times \hat{n}$

En cilíndricas
$$\nabla \times (M\hat{\theta}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\underbrace{M_z}_{=0} - \frac{\partial}{\partial z}M_\theta \right)\hat{r} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{M_r}_{=0} - \frac{\partial}{\partial r}\underbrace{M_z}_{=0} \right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rM_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}\underbrace{M_r}_{=0} \right)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (M\hat{\theta}) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial z}M_\theta\,\hat{r}}_{=0 \quad M = cte} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_\theta)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (M\hat{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_\theta)\hat{z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM)\hat{z} = \frac{M}{r}\hat{z}$$

$$\therefore \vec{J} = \frac{M}{r}\hat{z}$$

$\vec{M} \times \hat{n} \rightarrow$ En $r = b$ $\hat{n} = \hat{r}$ $\Rightarrow \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{\theta} \times \hat{r} = -M\hat{z}$

En $r = a$ $\hat{n} = -\hat{r}$ $\Rightarrow \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{\theta} \times (-\hat{r}) = M\hat{z}$

b) Las cargas magnéticas son:

En volumen: $\rho = -\nabla \cdot \vec{M}$

En cilíndricas
$$\nabla \cdot (M\hat{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\underbrace{M_r}_{=0}) + \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}(M_\theta)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{M_z}_{=0}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\vec{M}) = 0 = \rho$$

En superficie

$\sigma = \vec{M} \cdot \hat{n}$

En $r = b$ $\quad \hat{n} = \hat{r} \Rightarrow \vec{M} \cdot \hat{n} = M\hat{\theta} \cdot \hat{r} = 0$

En $r = a$ $\quad \hat{n} = -\hat{r} \Rightarrow \vec{M} \cdot \hat{n} = M\hat{\theta} \cdot (-\hat{r}) = 0$

$\Rightarrow \sigma = 0$

c) Cuando hay magnetización, el potencial $\vec{A}$ se puede escribir como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{con} \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{volumen}} \frac{\vec{J}\, dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{superficie}} \frac{\vec{K}\, dS}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Utilizando las corrientes de magnetización:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad / \nabla \cdot$$

$$\nabla \cdot (\vec{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} = \underbrace{-\nabla \vec{M}}$$

a pesar de la ausencia de corrientes libres $\vec{H}$ puede ser distinto de cero debido a la presencia de $\vec{M}$.

(En clase auxiliar dije que si no hay corrientes libres $\vec{H} = 0$ lo cual no es cierto)

Como $\nabla \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\nabla \phi_m$. Se puede demostrar que:

$$\text{con } \phi_m = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{volumen}} \frac{\rho\, dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\text{superficie}} \frac{\sigma}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS$$

En nuestro ejemplo $\rho = 0$ y $\sigma = 0 \Rightarrow \phi_m = 0 \quad \vec{H} = -\nabla \phi_m = -\nabla 0 = 0$

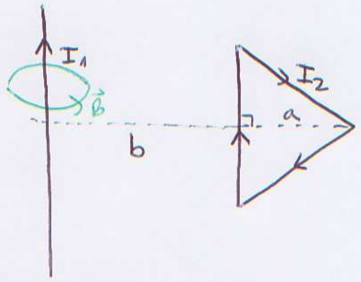
Luego $\vec{B} = \mu_0 (\underbrace{\vec{H}}_{0} + \vec{M})$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{B} = \mu_0 M \hat{\theta}$$

P4] Se tiene una línea infinita y un alambre en forma de triángulo equilátero de altura a.
El alambre está separado una distancia b del triangulo.
Calcule la inductancia mutua M.

Sol.



Sol

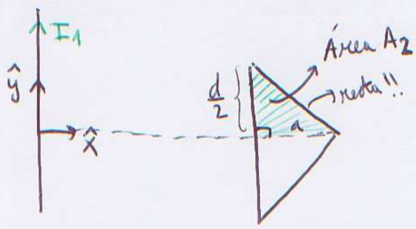
Supongamos que por el alambre infinito circula una corriente I_1 y por el triángulo circula una corriente I_2.

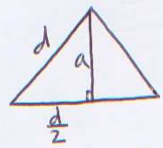
Para el alambre infinito:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_1$$

$$H 2\pi r = I_1 \Rightarrow H = \frac{I_1}{2\pi r} \Rightarrow B = \mu_0 H \Leftrightarrow \underbrace{B}_{B_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Calculemos el flujo producido por I_1 que atraviesa el área del triangulo (flujo mutuo)





$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4} d^2$$

$$\Rightarrow d = \frac{2}{\sqrt{3}} a$$

$$\phi_{\text{MUTUO}} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \iint \underbrace{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\right)}_{B_1} dy\, dx$$

$x \in [b, b+a]$

Para y: $y = mx + n$ → Ecuación de la recta

$$m = \frac{-\frac{d}{2}}{a} = \frac{-d}{\sqrt{3}\, d} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Luego

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}} x + n$$

Cuando $x = b+a \Rightarrow y = 0 \quad \Rightarrow n = \frac{(b+a)}{\sqrt{3}}$

Luego $y \in \left[0, -\frac{1}{\sqrt{3}} x + \left(\frac{b+a}{\sqrt{3}}\right)\right]$

Reemplazo en el flujo:

$$\phi_{MUTUO} = \int_b^{b+a} \int_0^{-\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{(b+a)}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\right) dy\, dx$$

$$= \int_b^{b+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{b+a}{\sqrt{3}}\right) - 0\right] dx$$

$$= \int_b^{b+a} \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}} + \frac{(b+a)\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\, 2\pi\, x}\right) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}} \left(-(b+a)+b\right) + \frac{(b+a)\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\, 2\pi} \left(\ln(b+a) - \ln(b)\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}} \cdot a + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\sqrt{3}} (b+a) \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$$

$\phi_{MUTUO\ TOTAL} = 2 \cdot \phi_{MUTUO}$ ya que sólo había calculado el flujo del área de arriba del eje x

$$\phi_{MUTUO\ TOTAL} = M \cdot I_1$$

$$\Rightarrow M = \frac{\phi_{MUTUO\ TOTAL}}{I_1} = \frac{\mu_0}{\pi\sqrt{3}} \left((b+a)\ln\left(\frac{b+a}{b}\right) - a\right)$$

DUDAS A: CABENAVI@ING.UCHILE.CL