Pauta Control 1
P3.
Como el campo es perpendicular en el plano, se cumple que el potencial es constante. Por lo tanto, basta con evaluar el potencial en el origen. (0.4 puntos)

Por definición:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iint \frac{\sigma dS}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

$$\vec{r} = 0$$

$$\vec{r}\,' = R\hat{r}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}\,'\| = \|0 - R\hat{r}\| = R$$

$$dS = R^2 \mathrm{sen}\theta d\theta d\varphi$$

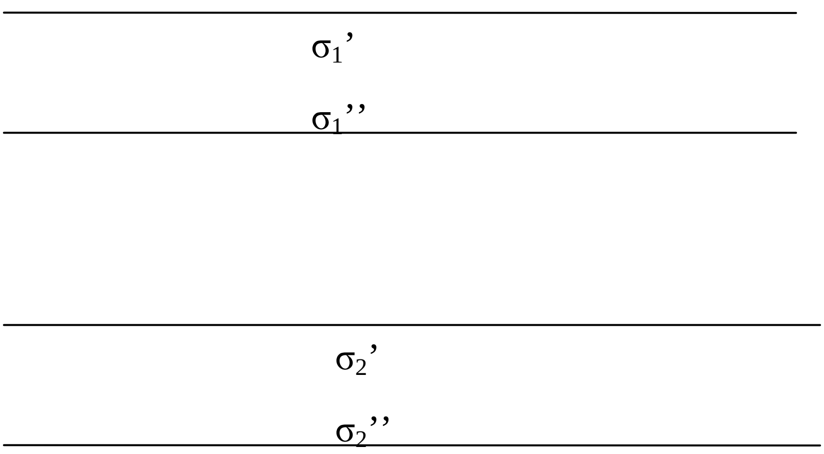
$$\Rightarrow$$

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma_o R^2 \mathrm{sen}\theta d\theta d\varphi}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} 2\pi R\sigma_o \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\theta d\theta$$

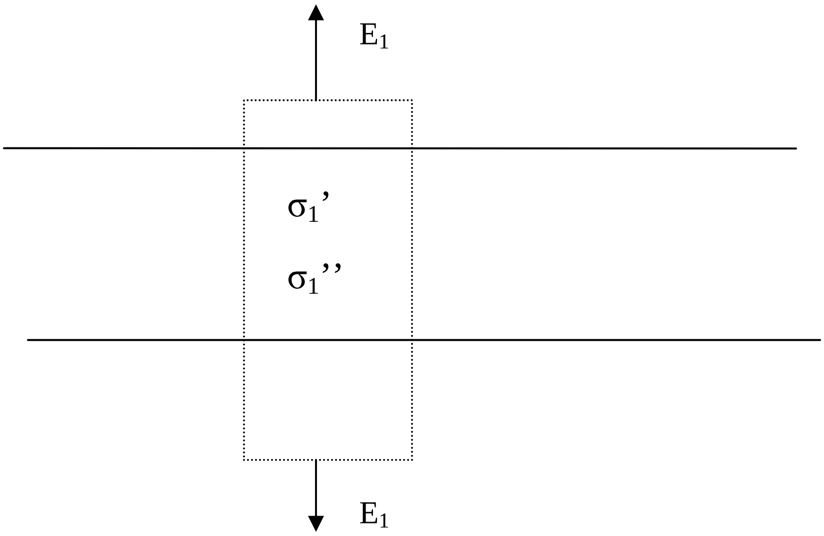
$$= \frac{R\sigma_o}{2\varepsilon_o}[-\cos\theta /_0^{\pi/2}] = \frac{R\sigma_o}{2\varepsilon_o} \quad \text{(0.6 puntos)}$$

$$V(r) = V(0) = \text{constante en el plano}$$

P4.
Por tratarse de placas conductoras, las cargas se acumulan en la superficie del conductor, tal como lo muestra la figura siguiente.



Calculemos el campo producido por la placa de densidad σ_1



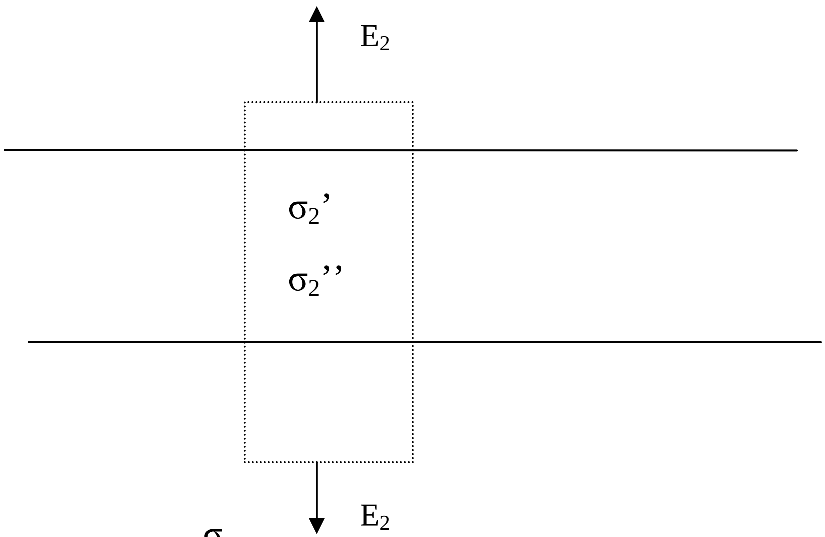
Aplicando Gauss para la superficie punteada:

$$\iint E_1 dS = \frac{(\sigma_1{}' + \sigma_1{}'')\Delta S}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma_1 \Delta S}{\varepsilon_o}$$

$$\underbrace{E_1 \Delta S}_{\text{arriba placa}} + \underbrace{E_1 \Delta S}_{\text{abajo placa}} = \frac{\sigma_1 \Delta S}{\varepsilon_o}$$

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}$$

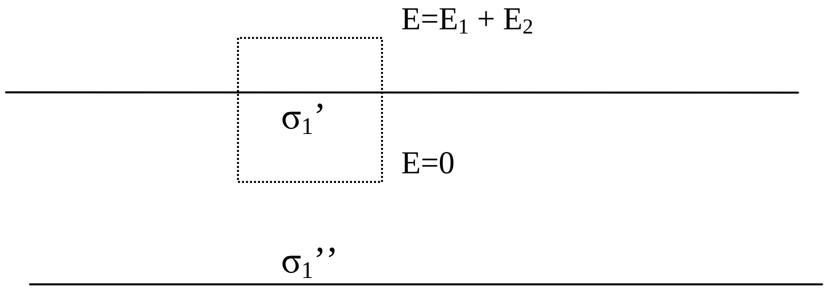
De manera análoga para la placa de abajo:



$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}$$

Por lo tanto, el campo total sobre la placa de mas arriba es igual a $E=E_1+E_2$
(0.5 puntos)

Aplicando Gauss en la superficie que se indica más abajo:



$$\iint EdS = \frac{\sigma_1 ' \Delta S}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\Delta S + 0\Delta S = \frac{\sigma_1 ' \Delta S}{\varepsilon_o} \qquad \text{(0.5 puntos)}$$

$$\Rightarrow E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o} = \frac{\sigma_1 '}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma_1 '$$

Además:

$$\sigma_1 ' + \sigma_1 '' = \sigma_1$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_1 '' = \sigma_1 - \sigma_1 ' = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad \text{(0.3 puntos)}$$

De manera análoga para la placa de abajo se llega a que:

$$\iint EdS = \frac{\sigma_2 '' \Delta S}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\Delta S + 0\Delta S = \frac{\sigma_2 '' \Delta S}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o} = \frac{\sigma_2 ''}{\varepsilon_o}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma_2 ''$$

Además:

$$\sigma_2 ' + \sigma_2 '' = \sigma_2$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma_2 ' = \sigma_2 - \sigma_2 '' = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

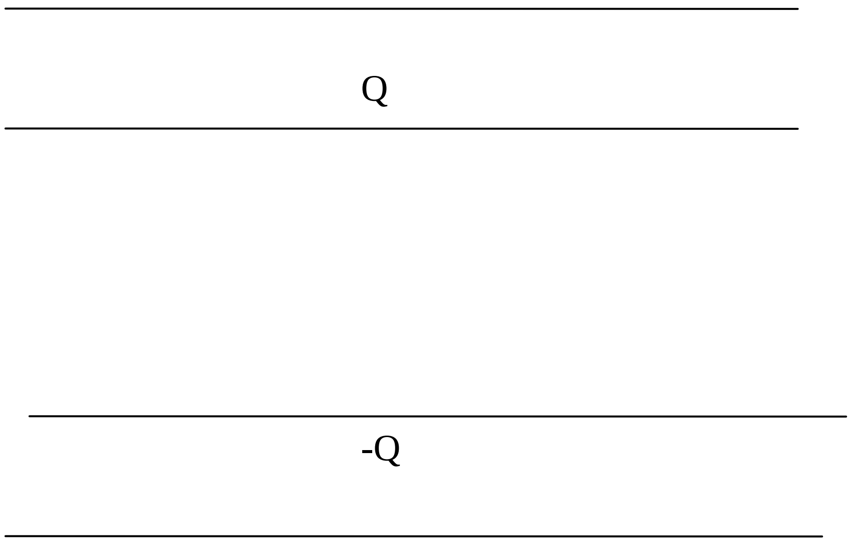
Caso particular $\sigma_1 = \sigma$ y $\sigma_2 = -\sigma$ Como en un condensador

$$\sigma_1 '' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sigma \qquad \sigma_1 ' = 0$$

$$\sigma_2 ' = 0 \qquad \sigma_2 '' = -\sigma$$

(0.2 puntos)

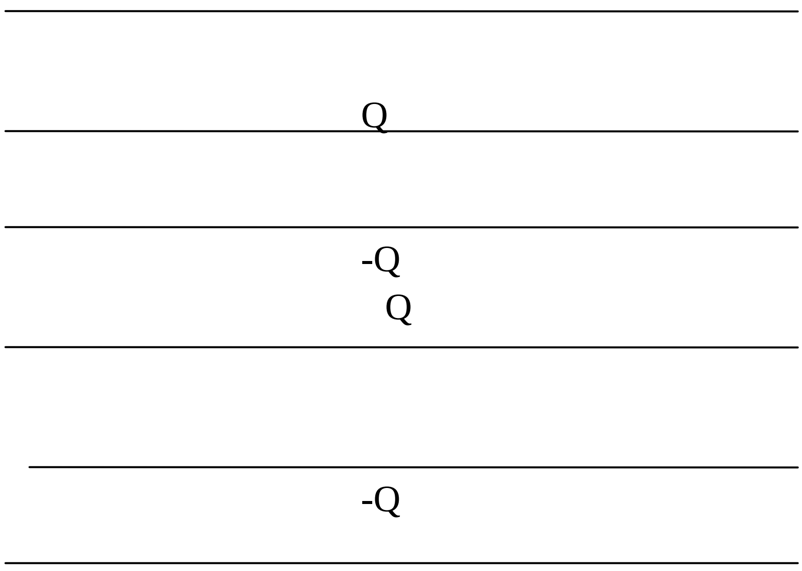
P5.
Como se trata de un condensador, las cargas se acumula como en la figura (ver caso particular problema 4). Suponiendo una carga Q en cada placa:



Para un condensador Q=CV.

El campo eléctrico entre las placas es $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$ (ver problema anterior).

Luego
$$V = \int_0^d E dl = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} d = \frac{Q}{A\varepsilon_o} d$$
$$\Rightarrow \frac{Q}{V} = C \Rightarrow C = \frac{A\varepsilon_o}{d}$$
(0.5 puntos)
Si ahora se coloca la placa de espesor t, la distribución de carga es la siguiente:



Calculando la nueva diferencia de potencial y considerando que en el conductor de espesor t no hay caída de potencial, se tiene:

$$V = \int_0^d E dl = \int_0^{d/2-t/2} \frac{\sigma}{\varepsilon_o} dl + \int_{d/2+t/2}^{d} \frac{\sigma}{\varepsilon_o} dl = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\left(\frac{d}{2} - \frac{t}{2}\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\left(\frac{d}{2} - \frac{t}{2}\right) \quad \text{(0.7 puntos)}$$

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}(d - t) = \frac{Q}{A\varepsilon_o}(d - t)$$

$$\Rightarrow$$

$$C' = \frac{A\varepsilon_o}{(d - t)} \quad \text{(0.3 puntos)}$$

La variación es C-C' o porcentualmente C/C'

Dudas a: cabenavi@ing.uchile.cl