FISICA MODERNA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile [1]

versión 27 de septiembre de 2007

1

Índice general

Capítulo X

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CAMPOS

X.1. Acción relativista para una partícula.

X.1.1. Formalismo Tradicional

Previamente hemos demostrado que una acción para una partícula relativista, invariante bajo Transformaciones de Lorentz y que tiene un límite no-relativista conocido es

$$S_o = -m\,c \int d\,s$$

Dimensionalmente $[S] = [En.] \times [T]$. Como $[ds] = [c\,d\,t]$, entonces, dimensionalmente $[s] = [mc^2] \cdot [T]$.

Queremos introducir en la acción en forma explícita que la trayectorai de la partícula es independiente de la parametrización adscrita a la misma.

Elegimos, además, expresar cada una de las coordenadas en función de este parámetro τ. Con esto mantenemos una formulación covariante de las ecuaciones de movimiento.

$$x'^{\mu}(\tau') \equiv x^{\mu}(\tau).$$

Recordemos que lo usual (en el caso no-relativista) es parametrizar las coordenadas espaciales con respecto al tiempo t: $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

Otra innovación será utilizar $(ds)^2$ como la Lagrangiano en lugar de ds. La razón no es evidente en esta etapa. Sin embargo el Lagrangiano original:

$$ds = \sqrt{-\eta_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\,\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)}\cdot(d\tau),$$

contiene una raíz cuadrada y este elmento es difícil de manejar si es preciso cuantizar esta acción. repasemos su expresión brevemente

$$S = -m\,c\int\sqrt{-\dot{x}^2}\,d\tau$$

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \qquad , \qquad \dot{x}^2 \equiv \eta_{n\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}.$$

Imponiendo $\delta S = 0$ a primer orden, obtenemos

$$\delta S = -m\,c\int d\tau\,\dot{u}_\mu\,\delta x^\mu \quad \text{donde} \quad u^\mu = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-(\dot{x}^\nu\dot{x}_\nu)}}.$$

u^μ es la cuadirvelocidad normalizada a la unidad.

La ecuación de movimiento es $\delta\,S \sim\, 0 \,\Rightarrow\, \dot{u}^\mu = 0$.

X.1.2. Formalismo invariante bajo parametrización

.

Definamos una acción

$$S' = \int d\,\tau\,\frac{1}{e(\tau)}\,\eta_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}.$$

Esta acción es invariante bajo parametrización. Note que la acción es invariante bajo un cambio de parametrización; $e(\tau) \to e'(\tau') : e(\tau)d\tau = e'(\tau')d\tau'$.

Las ecuaciones de moviento´, manteniendo fija la parametrización $e(\tau)$, son

$$\begin{aligned}\delta S' &= \int d\,\tau\frac{1}{e(\tau)}\,2\eta_{\mu\nu}\,\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{d\delta x^\mu}{d\tau}\\ &= 2\int d\tau\,\frac{1}{e(\tau)}\,\left[\eta_{\mu\nu}\,\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu\right) - \eta_{\mu\nu}\,\frac{du^\nu}{d\tau}\,\delta x^\mu\right]\end{aligned}$$

Si $\delta\,x^\mu = 0$ en los extremos,

$$\Rightarrow\ \frac{d\,u^\mu}{d\,\tau} = 0. \tag{X.1}$$

Las ecuaciones de movimiento son las mismas que las obtenidas con la aproximación tradicional.

Sin embargo, acá podemos variar la parametrización (manteniendo las coordenadas fijas!, $\delta\, x^\mu(\tau) = 0\,,\, \forall \tau$).

$$\delta S' = -\int d\tau\, \frac{1}{e^2}\, \delta e(-\dot{x}^2).$$

$$\delta S' \sim 0 \,\Rightarrow\, -\frac{\dot{x}^2}{e^2} \equiv +\eta_{\mu\nu}\, \frac{dx^\mu}{(e\, d\tau)} \cdot \frac{dx^\nu}{(e\, d\, \tau)} = 0$$

$$\dot{x}^2 = 0, \tag{X.2}$$

luego hemos resuelto la ecuación de una partícula sin masa. La ecuación (X.1) no implica que esta última restricción (X.2) sea nula.

La variación con respecto a $e(\tau)$ restringe las ecuaciones obtenidas a la familia de partículas sin masa.

La invariancia de la acción S' bajo parametrización ha resultado más restrictiva. Es lo natural, ya que podemos variar con respecto a las coordenadas $\delta x^\mu \neq 0$, y con respecto a la parametrización, de modo que hay más ecuaciones que antes.

$$\delta\, e\, \neq \text{ y } \,\delta\, x^\mu = 0.$$

Necesitamos otro Lagrangiano que considere partículas con masa.

Consideremos la siguiente expresión

$$S' = \frac{1}{2} \int (+e^{-1}\, \dot{x}^2 \,-\, e\, m^2\, c^2)\, d\, \tau \tag{X.3}$$

$$\frac{\delta\, S'}{\delta\, e} = 0 \,\Rightarrow\, \dot{x}^2 + e^2\, m^2\, c^2 = 0 \tag{X.4}$$

de modo que

$$e^2 = -\frac{\dot{x}^2}{c^2\, m^2}, \quad e^{-1} = \frac{m\, c}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \tag{X.5}$$

reemplazando esta expresión (X.5) en la acción original,

$$\begin{aligned} S' &= \tfrac{1}{2} \int \left(+ \frac{m\, c\, \dot{x}^2}{\sqrt{-\dot{x}^2}} - \sqrt{-\dot{x}^2}\, m\, c \right) d\tau \\ S' &= -\int m\, c \sqrt{-\dot{x}^2} d\tau = S. \end{aligned}$$

Hemos probado que a pesar de los cambios introducidos en la de acción, ésta genera la misma ecuación de movimiento que la original. (Como debe ser, por lo demás).

Las ecuaciones de movimiento se obtienen con $\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0$. Como el término sumado a la acción no depende de las coordenadas, entonces la ecuación de movimiento es la misma

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0.$$

A esto sumamos $\frac{\delta S}{\delta e} = 0$, que es la ecuación (X.5)

$$-\dot{x}^2 = c^2\, m^2\, e^2,$$

Si elegimos arbitraria pero convenientemente $e = \frac{1}{m}$, tenemos

$$\dot{x}^2 = -c^2\,,\ \text{luego}\ (\frac{dx^\mu}{ds})^2 = -1.$$

que corresponde a la parametrización afín de las ecuaciones de movimiento.

Si no elegimos e como una constante sino como una función de $\tau, e = e(\tau)$, entonces la ecuación de movimiento (X.1.2) se complica. Esto es natural.

Lo mismo sucede en las ecuaciones de Newton si elegimos una nueva para metrización como $t = t(t')$, donde $t(t')$ es una función nolineal de t'.

X.2. La acción para una partícula en un campo electromagnético

En esta sección obtendremos la ecuación clásica del movimiento de una carga en un potencial electromagnético a partir de un principio variacional. En seguida, utilizando el Lagrangiano deduciremos la ecuación de Hamilton-Jacobi para este problema. Dado que ambas ecuaciones provienen del mismo lagrangiano deben dar cuentta de la misma física. Mostraremos que esta escuación es similar a la que se obtiene en teoría de perturbaciones similar al procedimiento utilizado en el método de WKBJ (pero no es lo mimo) en mecánica cuántica.

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau\left[+\eta^{-1}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu - +\eta\, m^2\, c^2 + 2\frac{q}{c}\,A_\mu\,\dot{x}^\mu\right] \tag{X.6}$$

Donde $\eta = \eta(\tau)$ es una función que refleja la arbitrariedad en la parametrización de la trayectoria de la partícula.

Hemos parametrizado cada una de las coordenadas en función del largo propio de latrayectoria: $x^\mu = x^\mu(\tau)$. τ es un parámetro posible, podríamos utilizar por ejemplo: $ct = x^\circ$, el tiempo del observador en reposo, pero bajo esta parametrización los resultados no serían covariantes.

Variando la acción propuesta [X.6], tenemos:

$$\delta S = 0 = +\frac{1}{2}\int d\tau\left[\frac{2}{\eta}(\delta\,\dot{x}^{\mu})\dot{x}_{\mu} + 2\frac{q}{c}(\delta\,A_{\mu})\dot{x}^{\mu} + 2\frac{q}{c}\,A_{\mu}\,\delta\,\dot{x}^{\mu}\right] \tag{X.7}$$

Donde debemos utilizar los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\mu}\,\delta\,\dot{x}^{\mu} &= \frac{d}{d\tau}(\delta\,x^{\mu})\,\dot{x}_{\mu} = \frac{d}{d\tau}(\delta\,x^{\mu}\,\dot{x}_{\mu}) - \delta x^{\mu}\,\frac{d}{d\tau}\,\dot{x}_{\mu}, \\ \dot{x}^{\mu}\delta\,A_{\mu} &= \dot{x}^{\mu}\frac{\partial\,A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\,\delta x^{\nu}, \\ A_{\mu}(\delta\dot{x}^{\mu}) &= \frac{d}{d\tau}(A_{\mu}\,\delta x^{\mu}) - \frac{dA_{\mu}}{d\tau}\,\delta x^{\mu} = \frac{d}{d\tau}(A_{\mu}\cdot\delta x^{\mu}) - A_{\mu,\nu}\,\dot{x}^{\nu}\delta x^{\mu}. \end{aligned} \tag{X.8}$$

En estos cálculos hemos supuesto que δx^{μ} se anula en los extremos:

$$\delta x^{\mu}\,|_{A} = \delta x^{\mu}|_{B} = 0$$

$$\delta\,S = 0 = +\int d\tau\,\left[-\frac{1}{\eta}\,(\frac{d}{d\tau}\,\dot{x}_{\nu})\,+\frac{q}{c}\,\{A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}\}\dot{x}^{\mu}\right]\,\delta x^{\nu}$$

Introduciendo la definición del tensor de faraday $F_{\mu\,\nu}$:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\,A_{\nu} - \partial_{\nu}\,A_{\mu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu},$$

tenemos que

$$\delta\,S = 0 = +\int d\tau\,\left[-\frac{1}{\eta}\,\frac{d}{d\tau}\,(\dot{x}_{\nu}) + \frac{q}{c}\,F_{\nu\mu}\,\dot{x}^{\mu}\right]\,\delta x^{\nu}.$$

Adoptando una expresión para la parametrización de la trayectoria, tenemos:

$$\frac{1}{\eta^{2}}(\dot{x}^{\mu}\,\dot{x}_{\mu}) + c^{2}m^{2} = 0$$

con esta expresión podemos fijar η:

$$\frac{1}{\eta} = \frac{m\,c}{(-\eta_{\alpha\,\beta}\,\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\,\frac{dx^{\beta}}{d\tau})^{1/2}} = \frac{m\,c}{(\frac{ds}{d\tau})} = m, \quad \text{con } ds \equiv d\,\tau\cdot c.$$

Así, finalmente recuperamos la expresión para la fuerza de Lorentz:

$$\delta S = 0 \text{ para un } \delta x_{\mu} \text{ arbitrario} \Rightarrow m\,\frac{d}{d_{\tau}}\,u_{\nu} = +\frac{q}{c}\,F_{\nu\mu}\,u^{\mu}$$

$$m\,\frac{d}{d\tau}\,u^{\nu} = \frac{q}{c}\,F^{\nu\mu}\,u_{\mu}. \tag{X.9}$$

X.2.1. Invariancia del Lagrangiano

Como un cambio de parametrización no altera la trayectoria de la partícula, es una transformación de simetría del lagrangiano.

Analizaremos cómo opera esta transformación.

Origen del cambio de variable

Demuestre que una reparametrización

$$\tau' = \tau - \xi(\tau)$$

donde ξ es una función diferenciable y pequeña, genera una tansformación

$$\begin{array}{rcl} \delta x^\mu & = & \xi(\tau)\,\frac{dx^\mu}{d\tau} \\ \delta\eta & = & \frac{d}{d\tau}\xi(\tau)\eta(\tau)] \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \delta x^\mu & \equiv & x'^\mu(\tau) - x^\mu(\tau) \\ \delta\eta & \equiv & \eta'(\tau) - \eta(\tau) \end{array}$$

Recuerde que bajo una reparametrización las coordenadas de un evento Q permanecen invariantes

$$x'^\mu_Q(\tau') = x^\mu_Q$$

$$\bar\tau = \tau + \xi(\tau)$$

$$\bar x^\mu(\bar\tau) = x^\mu(\tau + \xi(\tau)) \simeq x^\mu(\tau) + \dot x^\mu \xi(\tau) + \cdots$$

$$\delta\, x^\mu(\tau) = \bar x^\mu(\bar\tau) - x^\mu(\tau) = \dot x^\mu \xi(\tau)$$

Por otra parte

$$\bar\eta(\tilde\tau) d\tilde\tau = \eta(\tau) d\tau$$

$$\bar\eta(\tilde\tau) = \eta(\tau)\frac{d\tau}{d\bar\tau} = \frac{\eta(\tau)}{1+\dot\xi} \sim \eta(\tau)(1-\dot\xi)$$

$$\bar\eta(\tau + \xi(\tau)) = \bar\eta(\tau) + \dot\eta\,\xi(\tau) = \eta(\tau)(1-\dot\xi)$$

$$\bar\eta(\tau) - \eta(\tau) = -\dot\eta\,\xi(\tau) - \eta\,\dot\xi = -(\eta\,\xi)^{\cdot}$$

$$\delta\eta = (\eta\,\xi)^{\cdot}$$

$$\delta\,\eta = \frac{d}{d\tau}(\xi\,\eta) \qquad\qquad \delta\,x^\mu = \xi\,\dot{x}^\mu$$

$$S'_{pp} = -m\int d\,\tau\left[\frac{1}{\eta}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu - \eta\,m^2\right]$$

$$\delta\,S'_{pp} = -m\int d\tau\left\{\left[-\frac{1}{\eta^2}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu - m^2\right]\delta\eta + \frac{2}{\eta}\,\dot{x}^\mu\,\delta\,\dot{x}_\mu\right\}$$

$$\delta\,S'_{pp} = -\left[\frac{1}{\eta^2}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu + m^2\right]\frac{d}{d\tau}(\xi\,\eta) + \frac{2}{\eta}\,\dot{x}^\mu\frac{d}{d\tau}(\xi\,\dot{x}_\mu)$$

$$\delta\,S'_{pp} = -\left[\frac{1}{\eta^2}\,\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu + m^2\right]\left[\eta\,\frac{d\xi}{d\tau} + \xi\,\frac{d\eta}{d\tau}\right] + \frac{2}{\eta}\,\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu\,\frac{d\xi}{d\tau}$$

$$+\frac{2\,\dot{x}^\mu}{\eta}\frac{d\,\dot{x}_\mu}{d\tau}\,\xi$$

$$= \left(\frac{1}{\eta}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu\,\frac{d\xi}{d\tau} - m^2\eta\,\frac{d\xi}{d\tau}\right)$$

$$-\left[\frac{1}{\eta^2}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu + m^2\right]\frac{d\eta}{d\tau}\,\xi \;+\; \frac{2\dot{x}^\mu}{\eta}\,\frac{d\,\dot{x}_\mu}{d\tau}\,\xi$$

$$\delta\,S'_{pp} = -\left[\frac{1}{\eta}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu - \eta\,m^2\right]\,\frac{d\xi}{d\tau}$$

$$+\xi\left[\frac{1}{\eta}\,2\,\dot{x}^\mu\,\frac{dx_\mu}{d\tau} - \left(\frac{1}{\eta^2}\,\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu + m^2\right)\frac{d\eta}{d\tau}\right]$$

$$\text{pero}\quad \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu}{\eta} - \eta\,m^2\right) =$$

$$= \left[\frac{1}{\eta}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu - \eta\,m^2\right]\,\frac{d\xi}{d\tau} + \xi\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{\eta}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}_\mu - \eta\,m^2\right]$$

$$= \frac{d}{d\tau}\left[\xi\left(\frac{1}{\eta}\,\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - \eta\,m^2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \delta S'_{pp} = -m\,\xi\left(\frac{1}{\eta}\,\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - \eta\,m^2\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{pero} \qquad \xi|_{t_1} = \xi|_{t_2} = 0$$

si $\delta\,x^\mu = \xi\,\dot{x}^\mu \quad\Rightarrow\quad \delta\,S'_{pp} = 0$ SIMETRIA.

X.2.2. Hamiltoniano Relativista

A partir del lagrangiano (X.6) podemos construir el hamiltoniano relativista para una partícula moviéndose en una campo electromagnético.

Por definición el hamiltoniano proviene de una transformación de Legendre del lagrangiano:

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\nu}}\, \dot{q}^{\nu} - \mathcal{L} \tag{X.10}$$

La definición del momentutm es:

$$P_{\rho} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\, u_{\rho}} = (m\, \dot{x}_{\rho} + \frac{q}{c}\, A_{\rho}). \tag{X.11}$$

Para dejar la expresión anterior en función del momentum y la posición, despejamos la cuadrivelocidad:

$$u_{\rho} = \frac{1}{m}(P_{\rho} - \frac{q}{c}\, A_{\rho}). \tag{X.12}$$

De esta manera

$$H = +P_{\rho}\, u^{\rho} - \mathcal{L} = \frac{1}{m}\, P_{\rho}(P^{\rho} - \frac{q}{c}\, A^{\rho}) - \frac{1}{2}\,[m\, u^{\mu}\, u_{\mu} + m\, c^{2} + \frac{2q}{c}\, A_{\mu}\, \dot{x}^{\mu}] \tag{X.13}$$

Como $\dot{x}^{\mu} \equiv \frac{d\,x^{\mu}}{d\,\tau}$, entonces $u^{\mu}\, u_{\mu} = -c^{2}$ puesto que $d\,s^{2} = -c^{2}\, d\,\tau^{2}$. Usando este resultado y reemplazando u^{μ} en función del momentum (X.12) tenemos:

$$H = +\frac{1}{m}\, P_{\rho}(P^{\rho} - \frac{q}{c}\, A^{\rho}) - m\, c^{2} - \frac{q}{m\, c}\, A_{\rho}(P^{\rho} - \frac{q}{c}\, A^{\rho})$$

ordenado los distintos términos y multiplicando por un factor $1/2$, tenmos la expresión final para el Hamiltoniano relativista:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\, \left[(P_{\rho} - \frac{q}{c}\, A_{\rho})(P^{\rho} - \frac{q}{c}\, A^{\rho}) - (m\, c)^{2}\right]. \tag{X.14}$$

Podemos completar este cálculo con dos resultados.

La ecuaciones de movimiento para este hamiltoniano son:

$$\begin{aligned} u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_\mu} &= \frac{1}{m}(P^\mu - \frac{q}{c} A^\mu), \\ \frac{d P^\mu}{d \tau} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_\mu} &= \frac{q}{m c}(P_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha)\partial^\mu A^\alpha = \frac{q}{c} u_\alpha \partial^\mu A^\alpha \end{aligned} \tag{X.15}$$

Debemos re-obtener la ecuación (X.9) de la última ecuación. Para ello debemos notar que:

$$\frac{d P^\mu}{d \tau} = \frac{d p^\mu}{d \tau} - \frac{q \, d A^\mu}{c \, d \tau} = \frac{d p^\mu}{d \tau} - \frac{q}{c} u^\alpha \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} =$$

Incorporando este resultado en la segunda ecuación de hamilton recuperamos la expresión original para la fuerza de Lorentz (X.9).

El otro resultado interesante es mostrar que $H = 0$. Esto coincide con la forma de la ecuacion relativista de la conservación de la energía $p_\mu p^\mu + m^2 c^2 = 0$. El Hamiltoniano adopta la misma forma salvo que el momentum incluye, en este ejemplo, una componente mecánica y otra electromagnética ($p^\mu \rightharpoonup P^\mu$).

Evaluando el hamiltoniano tenemos:

$$H = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\rho} u^\rho - \mathcal{L} = m \, u_\rho u^\rho + \frac{q}{c} A_\rho u^\rho - \frac{1}{2} m \, u_\rho u^\rho - \frac{1}{2} m \, c^2 - \frac{q}{c} A_\rho u^\rho = 0. \tag{X.16}$$

X.2.3. El hamiltoniano relativista es la ecuación de Hamilton Jacobi

Resumen del método de Hamilton-Jacobi.

La ecuación de Hamilton-Jacobi es una ecuación diferencial, no lineal de primer orden:

$$H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}. \tag{X.17}$$

Brevemente haremos una descripción de cómo se llega a ella. más detalles aparecen en el capítulo 3 de los apuntes.

Las ecuaciones de Hamilton, la transformación de Legendre que lleva del Lagrangiano al Hamiltoniano y la definición del momentum son:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial\, H}{\partial\, p^k}, \qquad & H &= p_k\, \dot{q}_k - L, \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial\, H}{\partial\, q^k}, \qquad & p_k &= \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{q}^k}. \end{aligned} \tag{X.18}$$

Como estamos trabajando con coordenadas canónicas, la diferencia entre el nuevo hamiltoniano, definido como K y el anterior, sólo puede ser una derivada parcial con respecto al tiempo: $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$.

Si podemos definir las nuevas variables canónicas Q_k y P_k en función de las condiciones iniciales para la posición y el momentum: $Q_k = q_k^{(0)}$ y $P_k = P_k^{(0)}$, el problema se simplifica puesto que $\dot{Q}_k = 0$ y $\dot{P}_k = 0$, y de esta forma el nuevo Hamiltoniano K es nulo $K = 0$. Quedamos con:

$$H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Si la función generadora F depende de las antiguas coordenadas q_k y de los nuevos momenta P_k, entonces (denominada F_2):

$$F = S(q_1, \cdots, q_n, P^1, P^2, \cdots, P^n, t), \text{ de modo que } p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k}, \text{ y } Q^k = \frac{\partial S}{\partial P_k}. \tag{X.19}$$

De esta forma se puede llegar a la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$H(q_1, \cdots q_n, \frac{\partial S}{\partial q_k} \cdots) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{X.20}$$

Ilustremos en qué sentido se puede relacionar la ecuación de Hamilton-Jacobi como una aproximación de orden cero a la ecuación de Schroedinger. Consideremos el caso de una partícula en una dimensión desplazándose en un potencial V(q): $H = \frac{1}{2m}\, p^2 + V(q)$. La ecuación de Hamilton-Jacobi para este caso es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}\, q^2 + \frac{\partial S}{\partial\, t} = 0$$

Recordemos qué ocurre con una ecuación escalar relativista

Comenzamos escribiendo la ecuación de conservación de la energía obtenida como un invariante en la teoría de la relatividad especial: $E^2 - c^2\, \vec{p}^2 = (m\, c^2)^2$. Usaremos unidades en que $c = \hbar = 1$. De acuerdo al protocolo, para obtener una teoría cuántica a partir de una teoría clásica, debemos transformar las cantidades físicas medibles en operadores actuando sobre una función que interpretamos como la amplitud de probabilidad.

$$
\begin{aligned}
E^2 - \vec{p}^2 &= m^2 \\
E \rightharpoonup i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} \qquad & \qquad \vec{p} \rightharpoonup -\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial x} \\
\left[\Box + m^2\right]\varphi = 0 \qquad & \qquad \left[\frac{\partial}{\partial\,x^\mu}\,\frac{\partial}{\partial\,x_\mu} + m^2\right]\varphi = 0.
\end{aligned}
$$

Examinemos la ecuación de Schroedinger (no relativista)

$$
\left[-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\nabla^2 + V(q)\right]\psi(r,t) = i\,\hbar\,\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} \tag{X.21}
$$

La solución en el caso en que no existe un potencial es una onda plana $\psi(x,t) = A_o\,\exp i[k\,x - \omega\,t]$, donde, por simplicidad, nos hemos limitado a una sola dimensión espacial. En un caso más real, donde la propagación de la onda posee dispersión, por ejemplo, tiene una rapidez diferente para cada longitud de onda, elegimos una función de onda más compleja:

$$
\psi(x,t) = A_0\,\exp i\,S(x,t)/\hbar \tag{X.22}
$$

Estudiamos qué sucede al incorporar esta función de onda en la ecuación de Schroedinger:

$$
-\frac{1}{2\,m}\,(\nabla\,S)^2 + V(q) - \frac{i\,\hbar}{2\,m}\,\nabla^2\,S = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{X.23}
$$

Hemos obtenido una ecuación de segundo orden, no-lineal en la primera derivada. Salvo casos particulares, no es probable que exista una solución exacta conocida. Realizamos una segunda aproximación para intentar sacar información de esta ecuación y, simultáneamente, del problema físico estudiado.

Desarrollamos la función $S(x,t)$ en serie de potencias donde el parámetro que determina el orden de aproximación es $\hbar$:

$$
S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hbar^n}{i}\,S_n = S_0 + \frac{\hbar}{i}\,S_1\,\cdots. \tag{X.24}
$$

Este método es canónico. Se conoce como la aproximación eikonal y constituye una forma de unificación donde la ley de Snell y la propagación de ondas, emergen desde el formalismo de Hamilton-Jacobi de la mecánica.

Orden cero

A orden cero la ecuación obtenida (si suponemos que el potencial no tiene ningún término proporcional a $\hbar$) es:

$$\frac{1}{2\,m}\,[\nabla\,S_0]^2 + V(x) = -\frac{\partial\,S_o}{\partial\,t} \tag{X.25}$$

La aproximación de orden cero en $\hbar$ nos da una ecuación que podemos interpretar como la aproximación clásica de la ecuación de Schroedinger. Tiene la estructura de la ecuación de Hamilton-Jacobi (X.20).

La ecuación a primer orden en $\hbar$ es:

$$-2\,(\nabla\,S_0)(\nabla S_1) - \nabla^2 S_0\; = -2\,\frac{\partial S_1}{\partial t}.$$

Aproximación relativista

La transformada de Legendre que permite pasar de un sistema canónico a otro es:

$$L = p^k\,\frac{dq_k}{d\tau} - H = P^k\,\frac{dQ_k}{d\tau} - K + \frac{d\Omega}{d\tau} \tag{X.26}$$

Donde K es el nuevo Hamiltoniano. La función generadora la definimos como: $\Omega \equiv S - P^k\,Q_k$. Con $S = S(q_k, P^k)$, tal que $\partial S/\partial q_k = p^k$ y $\partial S/\partial P^k = Q_k$. Introduciendo la derivada de esta función en la última ecuación, llegamos a

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{dS}{d\tau} - \frac{dP^k}{d\tau}\,Q_k - P^k\,\frac{dQ_k}{d\tau}$$

Combinando los diversos términos, obtenemos que el lagrangiano se transforma en:

$$L = -K + \frac{dS}{d\tau} - \frac{dP^k}{d\tau}\,Q_k$$

pero

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial S}{\partial q_k}\frac{dq_k}{d\tau} + \frac{\partial S}{\partial P^k}\,\frac{dP^k}{d\tau} = \frac{\partial S}{\partial \tau} + p_k\,\frac{dq_k}{d\tau} + Q_k\,\frac{dP^k}{d\tau}$$

$$L = p^k\,\frac{dq_k}{d\tau} - H = -K + \frac{\partial s}{\partial \tau} + p_k\,\frac{dq_k}{d\tau} + Q_k\,\frac{dP^k}{d\tau}$$

$$K = H + \frac{\partial s}{\partial \tau}$$

Si elegimos las nuevas variables P^k y Q_k constantes e iguales a las condiciones iniciales de las variables originales $q_k(t = 0)$ y $p^k(t = 0)$, entonces el nuevo hamiltoniano K es también una constante y de aquí se desprende que

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \tau} = 0$$

El Hamiltoniano original era, como vimos idénticamente nulo, de modo que la función de Hamilton-Jacobi relativista es

$$H(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k, \tau) = 0$$

Corresponde a lo encontrado anteriormente

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu\right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c} A_\mu\right) + (m\, c)^2 = 0$$

X.3. Libertad de Gauge (Calibre)

X.3.1. Electromagnetismo

El tensor de Faraday $F_{\mu\,\nu}$ no cambia su valor si el potencial $A_\mu(x)$ se reemplaza por $A'_\mu(x)$ relacionado con el anterior de la siguiente forma:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\, \chi(x)$$

Por convención, cuando escribimos $A_\mu(x)$, significa que las cuatro funciones A_μ dependen, en general, de todas las coordenadas: x^0, x^1, x^2 y x^3. Es una forma de escribir menos índices.

Como se notó, las transformaciones de Gauge dependen de las coordenadas, cambian de punto a punto del sistema de coordenadas, a diferencia de una transformación global, como la acción de una transformada de Lorentz, por ejemplo, que desplaza a todos los puntos igual.

La existencia de un gauge indica que existen más funciones (o grados de libertad) de las necesarias (o de las cantidades físicas a determinar), por ejemplo, $F_{\mu\,\nu}$ es independiente de la función $\chi(x)$. La acción S, no debe depender de algún gauge específico. De esta forma al obtener las ecuaciones de movimiento podemos determinar un gauge que nos facilite encontrar una solución. Tampoco debe depender del sistema de coordenadas, debe ser covariante, junto con ser invariante de gauge. Esto se cumple en electrodinámica

Ejemplo:

Indicamos una cantidad física que es un invariante bajo cambio de Gauge:

$$\begin{aligned}\oint A_\mu dx^\mu &= \int A'_\mu\, dx^\mu = \oint (A'_\mu\, dx^\mu + \partial_\mu\, x\, dx^\mu) \\ &= \oint A_\mu\, dx^\mu + 0, \quad \text{por ser una integral cerrada.}\end{aligned}$$

Supongamos un contorno cerrado y además espacial $(dt = 0)$:

$$\oint A_i\, dx^i = \int_\Sigma (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv \text{Flujo de } \vec{B}.$$

Si $A_\mu(x)$ no está bien definido en la región de integración, por ejemplo una función como $arctang(y/x)$ que permanece indefinida en $x = 0$, entonces resulta que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (o $\vec{E}$) no están relacionadas directamente.

Por ejemplo en el caso de una bobina toroidal $\vec{B} = \vec{E} = 0$ fuera del toroide. Sin embargo en el circuito de integración

$$\oint A_i\, dx^i \neq 0.$$

Esto resultado cobra significado en el caso de un electrón pasando a través de la doble rendija. En mecánica cuántica el potencial A_μ puede ser medido a diferencia de la física clásica donde no lo es. La verificación experimental ocurre en el experimento de la doble rendija, cuando se estudia el efecto Aharonov-Bohm.

X.3.2. Solución General para Potencial electromagnético sin fuentes.

La ecuación $F_{[\mu\,\nu,\alpha]} = 0$ tiene como solución general $F_{\mu\,\nu} = \partial_\mu\, A_\nu - \partial_\nu\, A_\mu$.

Estas son las cuatro ecuaciones de Maxwell sinfuentes. Las otras cuatro ecuaciones, con fuentes, son $\partial_\mu\, F^{\mu\,\nu} = 4\pi\, j^\nu/c$. Si consideramos sólo las ecuaciones de Maxwell en vacío (sin fuentes), que corresponden al caso de ondas electromagnéticas propagándose en el vacío, la ecuación diferencial correspondiente para el cuadri-potencial electromagnético es:

$$\partial_\mu\, \partial^\mu\, A_\nu - \partial^\mu\, \partial_\nu\, A_\mu = 0. \tag{X.27}$$

El método para resolver este sistema de ecuaciones es recurrir a la transformada de Fourier de esta función $a_\mu(k)$. No nos preocupamos de la validez de esta transformación, suponemos tácitamente que ambas funciones tienen soporte compacto, es decir están definidas en una región acotada del espacio tiempo y que tienden a cero rápidamente en infinito. O que so funciones de cuadrado integrable (L^2). Intuitivamente esto es como proyectar un vector en los vectores base y resolver para cada una de las componentes. Acá es una función, de modo que existen infinitas bases ($e^{i\,k\,x}$) y proyectamos en cada una de ellas, de modo que la ecuación se transforma en una ecuación algebraica.

Volviendo al método, tomamos la transformada de Fourier de $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) = \int_{k^\circ \geq 0} [e^{i\,k\,x}\, a_\mu(k) + a^*_\mu(k)\, e^{-ikx}] d^4k \tag{X.28}$$

$$\text{donde} \quad k\,x = k^\mu\, x_\mu = k^\circ\, x_0 + k^i\, x_i = k_0\, x_0 - \vec{k}\cdot\vec{x}.$$

Insertando la expresión X.28 en la ecuación X.27, obtenemos:

$$\partial^\mu \partial_\mu\, A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu\, A_\mu = \int \left[(k^\mu\, k_\mu\, a_\nu - k^\mu\, k_\nu\, a_\mu) e^{ikx} + c.c. \right] d^4k \tag{X.29}$$

Para que la integral sea nula para toda $a_\mu(k)$, debe cumplirse que:

$$k^2\, a_\nu - (k\,a) k_\nu = 0. \tag{X.30}$$

Existen dos soluciones posibles: $k^2 \neq 0$ y $k^2 = 0$.

$$\text{Si } k^2 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad a_\mu = \bar{k}_\mu\, f(\bar{k}). \tag{X.31}$$

$$\text{Si} \quad k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k^\circ)^2 = \mid \vec{k} \mid^2, k_0 = + \mid \vec{k} \mid . \tag{X.32}$$

En el primer caso [X.31], ya determinamos la expresión para a_μ. Definimos el cuadrivector $\bar{k}^\mu$ con una barra para distinguirlo del vector k_μ que es nulo $k^2 = 0$ y que participa en el segundo caso.

La solución de la ecuación X.30, para el segundo caso $k^2 = 0$ es:

$$\bar{k}\cdot a = 0, \;\; \text{o,} \;\; \mid \vec{k} \mid a_0 + k^i\, a_i = 0, \;\; \text{o explícitamente} \;\; \mid \vec{k} \mid a_0 - k_i\, a_i = 0. \tag{X.33}$$

Como $(k\,a) \equiv (k^\mu\, a_\mu) = 0$, entonces a_μ debe ser ortonormal a k_μ.

Dado un cuadrivector k^μ, existen tres cuadrivectores ortogonales a él. Dado que éste no es un espacio euclídeo, uno de los vectores ortonormales es el mismo k^μ, puesto que, por definición, ortonormal es: $(k^\mu\, k_\mu = 0)$. El vector k_μ queda descartado puesto que ya se utilizó en el caso anterior [X.31].

De este modo sólo debemos encontrar dos cuadrivectores ortonormales a k^μ y a_μ debe ser proporcional a ellos.

Pero antes de seguir con la determinación de a_μ, es conveniente analizar esto de los vectores nulos. Un punto interesante acerca de ellos lo estudiaremos antes de seguir con el problema.

Mostraremos en el siguiente ejemplo que el resto de los vectores que buscamos no puede ser nulo (salvo que recurramos a los números complejos, pero ésa es otra historia...).

Analizaremos este comentario en el siguiente ejercicio.

Ejemplo (Ref. [1], pag.17, Problema 3.2 .

Encuentre 4 vectores nulos linealmente independientes en el espacio de Minkowski. ¿Es posible encontrar 4 vectores NULOS que sean linealmente independientes y ortogonales entre sí?

Solución

Definamos cuatro vectores linealmente independientes:

$$e^{x^0}_\mu = [1,0,0,0],\; e^{x}_\mu = [0,1,0,0],\; e^{y}_\mu = [0,0,1,0],\; e^{z}_\mu = [0,0,0,1].$$

El subíndice μ indica las componentes del vector y el supraíndice α revela al vector. Una combinación lineal entre ellos genera los vectores nulos que denominamos n^α_μ, usando la misma notación:

$$n^1_\mu = e^{x^0}_\mu - e^x_\mu,\; n_2 = e^{x^0}_\mu + e^x_\mu,\; n^2_\mu = e^{x^0}_\mu - e^y_\mu,\; n^4_\mu = e^{x^0}_\mu - e^z_\mu,\; n^5_\mu = e^{x^0}_\mu + e^z_\mu ...$$

pueden existir más vectores nulos, el supraíndice puede seguir hasta 4, 5,..., a diferencia del subíndice μ que sigue tomando valores entre 0 y 3. Cada uno de los vectores nulos es ortogonal a sí mismo: $\eta^{\mu\,\nu}\, n^\alpha_\mu\, n^\alpha_\nu = 0$ para todo α. Como éste es un espacio de 4-dimensiones, por definición sólo pueden existir 4 vectores linealmente independientes. Podemos comprobar que los vectores nulos definidos NO son ortogonales entre sí. Por definición SON paralelos y ortogonales a sí mismos. Por ejemplo: $n^4_\mu = [1,0,0,-1]$ y $n^5_\mu = [1,0,0,+1]$, y multiplicando ambos vectores:

$$\eta^{\mu\,\nu}\, n^4_\mu\, n^5_\nu = 1 + 0 + 0 + 1 = 2, \tag{X.34}$$

algo similar sucede con otros pares de vectores nulos.

No pueden existir vectores nulos que sean ortogonales entre sí, porque de esta manera serían paralelos entre sí. Veamos, si k^μ y ℓ^ν son ambos nulos y ortogonales entonces $k^\mu\, k_\mu = k^\mu\, \ell_\mu = 0$ entonces $k_\mu - \ell\mu = 0$ y ambos son iguales o proporcionales.

Otra demostración consiste en asumir que existen 4 vectores nulos y ortogonales entre sí. Se puede demostrar que en este caso, si expresamos un vector cualquiera en esta base de vectores nulos, resulta tener módulo nulo. Como esto es un absurdo, la suposición inicial debe ser falsa. NO existen 4 vectores nulos, linelamente independientes y ortogonales entre sí.

□

Siguiendo con la resolución del problema de encontrar la expresión de a_μ en el caso $k^2 = 0$, debemos encontrar dos vectores ortonormales a k_μ. Se desprende del ejemplo resuelto que los vectores que buscamos no pueden ser nulos y que deben estar en el espacio complementario a k_μ. Los podemos definir como $e_\mu^{(\alpha)}$ con $\alpha = 1, 2$ como el parámetro que determina cada uno de los dos vectores. Como debemos cumplir la condición X.33, elegimos vectores tales que: $a_0 \equiv e_0^{(\alpha)} = 0$ para todo α.

Definimos la parte espacial $a_i \equiv e_i^{(\alpha)}$ y de acuerdo a la condición X.33, tenemos: $e_i^{(\alpha)}\, k_i = 0$ para todo α. Además queremos que los nuevos vectores sean unitarios:

$$e_i^{(\alpha)}\, e_i^{(\beta)}) = \delta^{\alpha\, \beta}$$

La solución general para $a_\mu(x)$ para ambos casos es:

$$a_\mu(k) = \bar{k}_\mu\, f(\bar{k}) + e_\mu^{(\alpha)}(k)\, b_\alpha(k) \tag{X.35}$$

con $\alpha = 1, 2$

Las funciones $b_\alpha = b_\alpha(k)$ son dos funciones arbitrarias del cuadrivector nulo k_μ. A esto se le suma la función arbitaria $f(\bar{k})$ donde $\bar{k}$ es un cuadrivector diferente de k_μ.

Introduciendo esta expresión para $a_\mu(k)$, podemos clasificar $A_\mu(x)$ en dos campos

$$A_\mu(x) = A_\mu^{\perp}(x) + A_\mu^{||}(x) \tag{X.36}$$

$$A_\mu^{\perp} = \int\, d^3k\, \left[e^{ikx}\, e_\mu^{(\alpha)}(\vec{k})\, b_\alpha(\vec{k}) + c.c. \right]_{k^\circ = |\vec{k}|} \tag{X.37}$$

Una de las dimensiones (k_0) de las integrales fue absorbida en las tres restantes debido a que k^0 está determinada en función del módulo del vector $\vec{k}$.

$$A_\mu'^{\,||} = \int\, d^4\bar{k}\, \left[e^{i\bar{k}x}\, \bar{k}_\mu\, f(\bar{k}) + c.c. \right], \tag{X.38}$$

pero el término entre corchetes se puede escribir como:

$$\frac{1}{i}\, \partial_\mu(e^{i\bar{k}x}) = \frac{i}{i}\, \bar{k}_\mu\, e^{i\bar{k}x}$$

$$\alpha(x) = \frac{1}{i} \int\, d^4\bar{k}\, \left[e^{i\bar{k}x}\, f(\bar{k}) + c.c. \right]$$

$$A_\mu^{||} = \partial_\mu\, \alpha(x) \qquad , \qquad A_\mu^{||} \text{ es sólo un gauge y se puede eliminar.} \tag{X.39}$$

Recordemos la física de un problema no puede depender del gauge. El campo eléctrico que medimos no puede depender del gauge que estamos usando para resolver la ecuación dinámica del campo.

$$A_\mu = A_\mu^\perp = \int d^3k \frac{1}{k_0} \left[e^{ikx}\, e_\mu^{(\nu)}\, b_{(\alpha)}\,(\vec{k}) + c.c. \right] \Big|_{k_0=|\vec{k}|} \tag{X.40}$$

Hemos demostrado que, en ausencia de fuentes, los campos eléctricos y magnéticos son ortonormales a la dirección de propagación. Éste es un resultado de validez general.

Hay más consecuencias atadas a este resultado. La interacción electromagnética es de alcance infinito. Esto está ligado a que el fotón tiene masa nula. Al examinar la acción del campo electromagnético, veremos que el hecho de imponer que la acción sea invariante de gauge, obliga a que la masa del fotón sea nula. Otras teorías de este tipo (vectoriales) que tienen masa no mula, son de corto alcance. El alcance de la fuerza depende de la masa de la partícula. En unidades en las cuales G, $\hbar$ y c son unitarios, la masa tiene dimensiones de $1/[L]$, el inverso de longitud. Si la masa es nula el alcance es infinito.

Cuando reinterpretamos la teoría relativista del electromagnetismo en términos de una teoría de Gauge basada en la invarianza bajo el grupo $u(1)$, la magnitud de la interacción es el único aspecto de la teoría de la interacción que no es derivado. Debe ser medido y una vez medido se establece para todas las interacciones electromagnéticas. Todos los otros aspectos de la teoría fluyen directamente.

Hoy sabemos que la fuerza electromagnética es sólo una cara de otra interacción, la electro-débil. Estos están definidos mediante otro grupo de Lie : $\delta\, u(2)$. Este nuevo gauge no es Abeliano.

Las interacciones fuertes en su versión actual son explicadas mediante el grup de Lie, también no Abeliano. $\delta\, u(3)$.

X.4. Ejemplos de Campos libres

(Referencia: Rubakov)

Hay una relación entre los campos clásicos y las partículas en la teoría cuántica:

$A_\mu(x)$: campo vertical, describe a los fotones (partículas con spin 1 y sin masa)

$\phi(x)$: campo escalar. El más simple, es un escalar de Lorentz. Describe a los π° mesones (sin carga)

$\phi_1(x)+i\phi_2(x)$: corresponde a los mesones cargados $\pi^\pm$ y mesones η y ciertas otras partículas.

$B_\mu(x)$: campo vectorial masivo, describen a las partículas $W^\pm$ y Z.

X.4.1. Campo escalar

$$S = \int d^\mu x \, \{ \frac{1}{2} \, \phi_{1\sigma} \, \phi_1^\sigma + \frac{1}{2} \, m^2 \, \phi^2 \}$$

si variamos el campo $\phi(x) \rightarrow \pi(x) + \delta \, \phi(x), S \, \phi_{1\sigma} = \partial_\sigma(\delta \, \phi)$ y suponiendo $\delta \, \phi$ decrece rápidamente (soporte compacto), entonces

$$\delta S = \int d^4 x [-\partial_\mu (\partial^\mu \varphi) \delta\varphi - m^2 \delta\varphi] +$$

$$+ \int d \sum^\mu [\partial_\mu \varphi] \delta\varphi$$

$d \sum^\mu \equiv$ frontera de el 4 - volumen de integración

$$\delta S = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_\sigma \partial^\sigma \phi + m^2 \, \phi = 0$$

Analice las dimensiones de esta ecuación

$$\frac{1}{[L^2]} = [m^2]$$

Estas dimensiones corresponden a

$$c = 1 = \frac{[L]}{[T]} \qquad , [\hbar] = 1 = M \, \frac{L^2}{T^2} \times T = \frac{ML^2}{T}$$

pero si $[L] = [T]$, entonces $[\hbar] = 1 = ML$.

luego $[M] = \frac{1}{[L]}$

Ejercicio: Encuentre la masa equivalente a una longitud de 1 cm

Empleando la transformada de Fourier, tenemos

$$\varphi(x) = \int_{k_0 \geq 0} d^4 k \left[e^{ikx} \, \tilde{\varphi}(k) + c.c. \right] . \qquad \text{(X.41)}$$

Aplicando la ecuación (X.41) sobre lo transformado de Founier, tenemos

$$[k^2 - m^2]\tilde{\varphi}(k) = 0,$$

de modo que si $\tilde{\varphi}(k) \neq 0$, salvo un conjunto de medida cero, entonces $k^2 = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$.

$$k^0 = +\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$

Esta ecuación representa la ley de dispersión de las ondas $(\omega = \omega(k))$ al propagarse.

En Clásica quiere decir de cada energía (color por ejemplo) se propaga con distinta velocidad. De esta forma el paquete de ondas inicial, se esparce a medida que se propaga.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int d^4k\,\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0)\,\left[e^{ikx}\,\tilde{\varphi}(k) + c.c.\right] \\
&= \int d^4k\,\delta\left((k_0 + \omega_k)(k_0 - \omega_k)\right)\theta(k_0)\left[e^{ikx}\tilde{\varphi}(k) + c.c.\right] \\
\delta(f(x)) &= \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x)|_{x_0}|} \Rightarrow (k_0)\delta(k_0^2 - \omega_k^2) = \frac{\delta(k_0-\omega_k)}{2k_0} + 0 \\
&= \int d^3k\,d\,k_0\,\frac{\delta(k_0-\omega_k)}{2k_0}\,\left[e^{ikx}\tilde{\varphi}(x) + c.c.\right] \\
&= \int \frac{d^3k}{2\omega_k}\,\left[e^{i(k_0t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\tilde{\varphi}(x) + c.c.\right] \\
E &= \sum_A \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_A}\,\dot{q}_A - \mathcal{L} \\
L &= \int d^3x\,\mathcal{L} = \int d^3\,x\left\{\tfrac{1}{2}\,\partial_\mu\,\varphi - \tfrac{1}{2}\,m^2\,\varphi^2\right\} \\
&= \int d^3\,x\left[\tfrac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 - (\nabla\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}\,m^2\,\varphi^2\right] \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\dot{\varphi}(x)} &= \dot{\varphi} \\
E &= \int d^3x\left[\dot{\varphi}^2 - \tfrac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \tfrac{m^2}{2}\,\varphi^2\right] \\
E &= \tfrac{1}{2}\int d^3\,x\,\left[\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + \tfrac{m^2}{2}\,\varphi^2\right]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ que la elección de signo en la acción fue la correcta. La Energía debe ser positiva, o más precisamente tener un valor mínimo finito.

X.4.2. Resumen de un campo en interacción

Campo escalar complejo: φ y $\varphi*$ son independientes

$$S = \int d^4x \, \left[\partial_\mu \varphi * \, \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi * \, \varphi\right]$$

$$\delta\varphi* \neq \partial^\mu \partial_\mu \varphi \cdot + m^2\varphi = 0$$

$$\delta\varphi = 0 \Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \varphi * + m^2 \varphi* = 0$$

Existe una cantidad conservada

$$J'_\mu = -i(\varphi * \, \partial_\mu\varphi - \varphi \, \partial_\mu \varphi*)$$

$$\partial^\mu J_\mu = -i \left[\partial^\mu \varphi * \, \partial_\mu \varphi + \varphi * \, \partial^\mu \partial_\mu\varphi - \partial^\mu \varphi \, \partial_\mu \varphi * - \varphi \, \partial^\mu \partial_\mu \varphi*\right] = 0$$

si se cumplen las ecuaciones de movimiento.

Además, las ecuaciones son invariantes bajo el siguiente cambio:

$$\varphi \longrightarrow e^{i\alpha} \varphi \qquad , \ \alpha \equiv \text{constante, y}$$

$$\varphi* \longrightarrow e^{-i\alpha} \varphi * .$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

$$\int d^4x \, \partial_\mu J^\mu = \int d^3x \, J^0 + \int d^4x \, \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$= Q = \int d^4x \, \nabla \cdot \vec{J}$$

$$\partial_0 Q = \int d^3 \, \partial_0 \, J_0 = - \int d^3x \, \nabla \cdot \vec{J}$$

$$= - \int d\vec{\sum}^\mu \cdot \vec{J}$$

si $\vec{J} \to 0$ en ∞

$$\Rightarrow \partial_0 Q = 0$$

X.4.3. Interacción con campos

$$S = \int d^4x \, [(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - V(\varphi)]$$

$$V(\varphi) = \frac{Vm^2}{2} \varphi^2 + V_I(\varphi)$$

Ejemplo: Dado $V(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\alpha}{3} \varphi^3 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4$

Encontrar los coeficientes α, λ y m tales que la energía tenga una cota inferior

Las ecuaciones de movimento son

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = q \int_\nu$$

$$\partial^\nu J_\nu = 0$$

¿Podemos considerar $J_\mu^{(0)} \equiv -i \, [\varphi * \, \partial_\mu \varphi - (\partial_\mu \varphi *)\varphi]$ tal que $J_\mu^{(0)} = J_\mu$?

Si $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i \, \varphi_2)$ y φ_1 es independiente de φ_2 entonces la densidad Lagrangiana, $\mathcal{L}$, se puede escribir:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_i \, \partial^\mu \varphi_i - \frac{m^2}{2} \varphi_i, \rho_i$$

Existe suma sobre $i = 1, 2.$

La conservación dela corriente $J^\mu, \mu = 0$, implica una conservación de la çarga". No es necesariamente la carga eléctrica, puede ser masa, spin isotópico ...

Defina

$$Q_0 = J \, d^3x \, J^0$$

Q_0 puede depender del tiempo

$$\partial_0 \, Q_0 = \int d^3x(J^0, 0) = -\int d^3x(J^i, i)$$

$$= \oint d \sum \cdot \vec{J} = 0$$

Recuerde que $\vec{J} = 0$ en infinito y que $J^i, i \equiv \nabla \cdot \vec{J}$ luego, existe una carga conservada. No hemos especificado su significado.

Interacción entre un campo escalar complejo y el campo electromagnético

$$S = \int d^4x \left[\partial_\mu \varphi * \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi * \varphi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - q \, J^0_\mu A^\mu \right]$$

Las ecuaciones de movimiento

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi + 2\,i\,q(\partial_\mu \varphi) A^\mu + i\,q\,\varphi\,\partial_\mu A^\mu = 0$$

$$-\partial_\mu \partial^\mu \varphi + -m^2 \varphi * -2\,i\,q(\partial_\mu \varphi *) A^\mu + i\,q\,\varphi * \,\partial_\mu A^\mu = 0$$

Vemos que $J^{(0)}_\mu$ no es conservado si las ecuaciones de movimiento se cumplen

$$\partial^\mu \, \delta^{(0)}_\mu = -i(\varphi * \, \partial^\mu \, \partial_\mu \, \varphi - \varphi \, \partial^\mu \, \partial_\mu \, \varphi *)$$

Multiplicando por $(-i\varphi *)$ y $(i\,\varphi)$ adecuadamente, obtenemos:

$$\partial^\mu \, J^{(0)}_\mu = 2\,q\,\partial^\mu (\varphi * \, \varphi \, A_\mu)$$

Una forma ilustrativa de resolver este problema es la siguiente.

Vamos a requerir que el Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones de Gauge:

$$\begin{array}{lcll}
\varphi(x) & \rightarrow & \varphi'(x) & = & e^{i\,\alpha(x)} \varphi(x) \\
\varphi * (x) & \rightarrow & \varphi' * (x) & = & e^{-i\,\alpha(x)} \varphi * (x) \\
A_\mu(x) & \rightarrow & A'_\mu(x) & = & A_\mu(x) + \frac{1}{q}\,\partial_\mu \, \alpha(x)
\end{array}$$

El campo electromagnético es invariante bajo esta transformación para A_μ. Los campos φ y $\varphi *$, no lo son, salvo el caso $\alpha(x) =$ constante

Calculemos

$$\partial_\mu \, \varphi'(x) = e^{i\,\alpha} [\partial_\mu \varphi + i(\partial_\mu \, \alpha) \varphi]$$

Definimos

$$(D_\mu \varphi)' = e^{i\,\alpha(x)} D_\mu \varphi$$

$D_\mu \varphi \to \partial_\mu \varphi$ en el límite de campos débiles

$$\begin{aligned}
D_\mu \varphi &= \partial_\mu \varphi - i\,q\,A_\mu\,\varphi = (\partial_\mu - i\,q\,A_\mu)\varphi \\
D_\mu \varphi' &= \partial_\mu \varphi' - i\,q\,A'_\mu\,\varphi' \\
&= e^{i\,\alpha}\partial_\mu\,\varphi + e^{i\,\alpha}\,\varphi\,i(\partial_\mu\,\alpha) \\
&- \; i\,q\,A_\mu\,e^{i\,\alpha}\varphi - i\,q\,\tfrac{1}{q}(\partial_\mu\,\alpha)\,e^{i\,\alpha}\varphi \\
&= e^{i\,\alpha} D_\mu\,\varphi
\end{aligned}$$

Por tanto $(D_\mu \varphi) * (D^\mu \varphi)$ es invariante de Gauge.

Proponemos el siguiente Lagrangiano

$$S = \int d^\mu x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\,\nu}\,F^{\mu\,\nu} + (D_\mu\,\varphi) * (D^\mu\,\varphi) - m^2\,\varphi *\,\varphi \right]$$

Variando la acción con respecto a los campos A_μ, obtenemos

$$\partial^\mu\,F_{\mu\,\nu} = J_\nu$$

$$J_\nu = -i(\varphi *\,\partial_\mu\,\varphi - (\partial_\mu \varphi *)\varphi) - 2q\,A_\mu\,\varphi *\,\varphi$$

Escrita en forma invariante:

$$J_\mu = -i\,[\varphi *\,D_\mu\,\varphi - (D_\mu\,\varphi) * \varphi]$$

Ojo con $\varphi *$, que hemos asumido independiente

$$D_\mu\,\varphi * = (\partial_\mu + i\,q\,A_\mu)\varphi *$$

El signofrente al campo de gauge A_μ tiene el objeto de contrapesar las derivadas de manera que,

$$(D_\mu\,\varphi *) = e^{-i\,\alpha(x)}(D_\mu\,\varphi *)$$

Las ecuaciones de campo para φ y $\varphi*$ son

$$D_\mu\, D^\mu\, \varphi + m^2\, \varphi = 0$$

$$D_\mu\, D^\mu\, \varphi = (\partial_\mu - i\, q\, A_\mu)(\partial^\mu - i\, q\, A^\mu)\varphi$$

Comprobemos que la corriente se conserva:

$$\partial^\mu\, J_\mu = -i\, \left[(\partial^\mu\, \varphi*)(D_\mu\, \varphi) + \varphi * (\partial^\mu\, D_\mu\, \varphi) - (D_\mu\, \varphi*)(\partial^\mu \varphi) - \partial^\mu (D_\mu\, \varphi| * \varphi)\right]$$

$$\partial^\mu\, \varphi *\, D_\mu\, \varphi + \varphi *\, \partial^\mu\, D_\mu\, \varphi =$$

$$= \partial^\mu\, \varphi *\, D_\mu\, \varphi + i\, q\, A_\mu\, \varphi *\, D^\mu\, \varphi$$

$$+ \varphi *\, \partial^\mu\, D_\mu\, \varphi - i\, q\, A_\mu\, \varphi *\, D^\mu\, \varphi$$

$$= D_\mu\, \varphi *\, D^\mu\, \varphi + \varphi *\, D_\mu\, D^\mu \varphi$$

Análogamente para el otro campo

$$\partial^\mu\, J_\mu = 0 - i(\varphi *\, D^\mu\, D_\mu\, \varphi - \varphi\, D^\mu\, D_\mu\, \varphi*)$$

$$\partial^\mu\, F_{\mu\,\nu} = J_\nu$$

$$D_\mu\, D^\mu\, \varphi + m^2\, \varphi = 0$$

X.5. Cuerda de Nambu-Goto

a) Muestre que para una cuerda no-relativista, la acción de Nambu-Goto se reduce a un término con la energía cinética menos un término correspondiente a la energía potencial proporcional al largo de la cuerda.

b) Pruebe que la energía cinética proviene sólo de la componente de la velocidad perpendicular a cuerda.

c) Calcule la masa por unidad de largo que se desprende de la expresión de la energía potencial y cinética.

d) Muestre que las ecuaciones clásicas de movimiento indican que los extremos de la cuerda se mueven con la velocidad de la luz.

X.6. Ejercicios Propuestos

1.– En un párrafo de un trabajo aparece la siguiente afirmación: ”Las ecuaciones de movimiento de un campo escalar sin masa ϕ, se pueden obtener a partir de la siguiente densidad Lagrangiana:”

$$\mathcal{L} = \frac{F^2}{2}\,(\partial_\mu\,\phi)^2, \quad \text{con F=Constante}.$$

y continúa: .Esta densidad Lagrangiana puede ser también obtenida a partir del Lagrangiano alternativo:”

$$\mathcal{L} = i\,(\partial_\mu\,\phi)\,J^\mu + \frac{1}{2F^2} J_\mu\,J^\mu.$$

a.- Demuestre que variando la acción $S = \int d^4x\,\mathcal{L}$ con respecto a J^μ en este último Lagrangiano Ud. obtiene una ecuación para J^μ. Esta es: $J_\mu = -i\,F^2\,\partial_\mu\,\phi$.

b.- Reemplace esta expresión de J^μ en el último lagrangiano y re-obtenga el primero de ellos.

2.– a.- Defina la derivada covariante en la forma usual: $D_\mu \;\equiv\; \partial_\mu + i\,e\,A_\mu$. Considerando D_μ como un operador actuando sobre una función, encuentre el valor del conmutador $[D_\mu, D_\nu] = ?$.

¿Puede darle una interpretación física a la expresión obtenida?

b.- Una forma de generalizar la teoría anterior a otra se ha logrado definiendo una nueva derivada covariante como:

$$D_\mu \;\equiv\; \partial_\mu + i\,g\,A_\mu, \quad \text{con} \quad A_\mu \equiv\; A^a_\mu\,\tau^a,$$

donde existe una suma implícita en el índice a y τ^a con a=1,2,3, son las matrices de Pauli. Los elementos A^a_μ son tres vectores diferentes identificados cada uno con el índice a=1, 2 y 3. Cada uno de estos vectores tiene cuatro componentes, donde cada componente está identificada con el índice μ.

Encuentre:

$$[D_\mu, D_\nu] =$$

Considere ahora D_μ como un operador actuando sobre un vector columna de dos componentes. (Similar al operador ∂_t actuando sobre C_1 y C_2 en la teoría de perturbaciones).

Compare este resultado con aquel de la parte a.-. Recuerde que los A^a_μ son funciones, por tanto conmutan. Obviamente las matrices de Pauli no conmutan.

Esta es la derivada covariante utilizada en la teoría de gauge de Yang-Mills con el grupo SU(2).

3.– Al considerar las ecuaciones de Maxwell, se estudió, con cierto detalle y para el caso sin fuentes, la solución general del cuadri-potencial $A_\mu(x)$. Las soluciones se clasificaron de acuerdo al valor de k^2.

Especifique, considerando los casos posibles, las propiedades de $A_\mu(x)$ si optamos por el gauge $A_0 = 0$. Por ejemplo si hay funciones que quedan sin determinar, qué funciones son nulas...

4.– a) Supongamos que los vectores $e^{(1)}_\mu$ y $e^{(2)}_\mu$ son reales. Esto corresponde a una polarización lineal de una onda electromágnetica. Demuestre que en una onda plana que tiene la forma siguiente (ver nomenclatura en apuntes):

$$A_\mu(x) = e^{i\,k\,x}\, e^{(1)}_\mu\, b_1$$

el campo magnético es perpendicular (en el sentido habitual de tres dimensiones) al campo eléctrico en cada punto del espacio tiempo x y que ambos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son ortogonales al vector $\vec{k}$.

b) Considere el Gauge de Coulomb: $\nabla\,\vec{A} \equiv \partial_i\, A_i$.

¿Cuál es la condición que debe satizfacer la función $\alpha(x)$ para que el nuevo potencial A'_μ cumpla con la restricción del gauge de Coulomb? ¿Cuál es la expresión para A_μ? Señale explícitamente cuál es la función arbitraria en la determinación de A_μ?

5.– El monopolo de Dirac es un ejemplo simple pero no trivial donde se mezcla la geometría y la física.(Una referencia general es Jackson de electrodinámica, sección 6.12 y problema 6.18.)

El modelo de Dirac se puede visualizar de la siguiente forma: imagine el monopolo magnético como una esfera de donde emerge radialmente el campo magnético. Las líneas de campo magnético ingresan por un tubo infinitamente estrecho por el segmento inferior del eje z, provenientes de infinito.

En el problema siguiente se indica un camino que comienza en la solución del problema clásico de un monopolo magnético (nunca observado hasta hoy) el papel de la transformación de gauge en las ecuaciones del campo clásico hasta el papel de las transformaciones de gauge en la ecuación de schroedinger, terminando en la cuantización de la carga eléctrica si existe un solo monopolo en el universo.

a.- Suponga que existe un monopolo magnético de carga g, $\rho_M = 4\,\pi\,g$ en el origen de coordenadas. Encuentre la expresión para el campo magnético $\vec{B}$ en coordenadas esféricas. Demuestre que el potencial magnético $\vec{A}$ asociado tiene una sola componente distinta de cero, ella es:

$$A_\phi = g\,\frac{(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\,\hat{\phi}. \tag{X.42}$$

Usando $\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ y la expresión del vector potencial magnético (X.42), compruebe que recupera la expresión original para $\vec{B}$.

b.- Surge una dificultad sin embargo: $\vec{A}$ [X.42] no está definido en $\theta = \pi$. Primero verifique que nada sucede en $\theta = 0$, donde $\theta = 0$ corresponde al eje-z con $z > 0$. Compruebe que usando la integral $\oint d\vec{S}\,\cdot\,\vec{B}$ = $\int d^3x\,\vec{\nabla}\,\cdot\,\vec{B}$, no se obtiene el mismo resultado que utilizando el potencial,$\oint\, d\vec{S}\,\cdot\,\vec{B}$ = $\oint_{\partial S^2} d\,\vec{\ell}\cdot\,\vec{A}$ =?, donde ∂S^2 es el borde de S^2.

c.- No hay una buena razón para ubicar la singularidad en la parte inferior del eje z. Supongamos que la singularidad se ubica por la parte positiva del eje z. Muestre (se debe llegar al mismo campo magnético del caso anterior) que en este geometría el potencial magnético, que denominamos $\vec{A_-}$ es igual a:

$$A_\phi = g\,\frac{(-1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\,\hat{\phi}\;\;\text{válido para}\,\theta > \epsilon \equiv U_-. \tag{X.43}$$

Si re-bautizamos el potencial inicial como $\vec{A}_+$, válido en $\theta <\;\pi - \epsilon\,\equiv\,U_+$, entonces en la intersección de $U_+ \bigcap U_-$ tenemos dos potenciales magnéticos y un sólo campo magnético. Los potenciales deben entonces estar relacionados por un gauge. Escriba explícitamente la ecuación

$$\vec{A_-}\;=\;\vec{A_+} + \vec{\nabla}\Lambda. \tag{X.44}$$

y encuentre que $\Lambda = -2\,g\,\phi$.

d.- Como Λ, desafortunadamente, tampoco está definido unívocamente (piense en $\phi = 0$ y $\phi = 2\,\pi$), vamos a recurrir al caso cuántico para liquidar el asunto, puesto que no hay como arreglar esta falta de unicidad dentro de la física clásica.

La solución cuántica la proporcionaron Wu y Yang en 1976.

Primero se le pide que demuestre que la ecuación de Schroedinger para una una partícula con carga e

$$\left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\,\vec{A})^2 - e\,\phi\right]\,\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial\,t}\,\psi, \tag{X.45}$$

es invariante de gauge bajo las siguientes transformaciones simultáneas, que incluyen a la función de onda ψ:

$$\begin{aligned}
\vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \\
&= \\
\phi' &= \phi - \frac{\partial}{c\partial\, t}\Lambda, \\
&= \\
\psi' &= \exp\left[i\frac{e\,\Lambda}{\hbar\, c}\right]\psi_{+}.
\end{aligned} \tag{X.46}$$

e.- Suponga que conocemos una solución de la ecuación [X.45](para el argumento que sigue no es necesario conocer su dependencia en la coordenadas explícitamente). Para ser específico, si conocemos la expresión para ψ_+, ésta debe ser univaluada, por ejemplo, en el ecuador de la esfera ($\theta = \pi/2$) el valor de esta función en $\phi = 0$ debe ser el mismo que en $\phi = 2\,\pi$.

En la región en que ambos potenciales son válidos ($U_+ \bigcap U_-$) (por eso especificamos $\theta = \pi/2$), las correspondientes soluciones ψ están relacionadas por la última transformación de gauge mencionada [X.46].

Demuestre que si exigimos que la función de onda ψ_- sea también univaluada en la esfera, es decir, que al igual que ψ_+ tenga el mismo valor que ψ_+ en $\phi = 0$ y $\phi = 2\,\pi$, entonces necesariamente la carga magnética g está cuantizada y resulta ser: $g = n\,(\hbar\, c/(2|e|)$.

Concluyendo: basta que exista un monopolo magnético en el universo, para que la carga magnética esté cuantizada, y se aparezca en unidades de $(\hbar\, c/(2|e|)$.

6.– A continuación procuraremos ilustrar algunas ideas acerca del fenómeno de superconductividad y mostrar su semejanza con el formalismo de un campo escalar complejo acoplado con las ecuaciones de Maxwell. Una referencia útil acerca del fenómeno de la superconductividad, a este nivel, es Feynman Lectures on Physics Vol. III, Cap. 21. (Leer sección 3 para una interpretación física del momentum electromagnético.)

La supercoductividad es un modelo macroscópico y ocurre porque un par de electrones quedan ligados por una fuerza muy débil a través de su interacción con la red cristalina y su amplitud de probabilidad es una función extendida comparada con el tamaño de la red. Bajo ciertas circunstancias, en el interior del cristal el campo magnético es nulo. Existe una corriente en la superficie que impide que el campo magnético externo (si es menor que un cierto campo crítico H_c) penetre. Este es el efecto Meissner.

Ginzburg y Landau propusieron un modelo fenomenológico para la superconductividad en 1950. El modelo definitivo es la teoría de BCS que apareció en 1957.

Considere la densidad de energía libre de un campo escalar complejo independiente del tiempo e interactuando con un campo magnético:

$$F = \frac{1}{V} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2m^*} \left| \left[\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{2e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} + \alpha \, |\varphi(\vec{r})|^2 + \frac{\beta}{2} \, |\varphi(\vec{r})|^4 \right\}$$

.

a.- Variando sólo el campo $\vec{A}$ encuentre la ecuación $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = (4\pi \, \vec{j})/c$ con

$$\vec{j} = -\frac{2e\hbar}{2im^*} \left[\varphi^* \vec{\nabla}\varphi - \varphi \vec{\nabla}\varphi^* \right] - \frac{2e^2}{m^* c} (\varphi \, \varphi^*) \vec{A}]$$

.

b.- Variando con respecto a φ^*, encuentre la ecuación de Schr$\ddot{o}$dinger:

$$\left[\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{2e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + \alpha + \beta \, |\varphi|^2 \right] \varphi(\vec{r}) = 0$$

c.- Si $\varphi \, \varphi^* = n$ donde n representa la densidad de electrones ligados en el superconductor. Para temperaturas inferiores a la temperatura crítica, esta densidad es constante al interior del metal. Si se produjera una sobre densidad en algún punto de la red, las fuerzas eléctricas la destruirían. Inserte esta información $\varphi =$constante en la ecuación de la corriente $\vec{j}$, y demuestre que la corriente es proporcional $\vec{A}$. Usando las definiciones del vector potencial y las ecuaciones de maxwell encuentre una solución para $\vec{A}$. Considere que dentro del superconductor el campo magnético es nulo y fuera es constante.

Bibliografía

[1] **Problem Book in relativity and Gravitation**,1975, A. Lightman, W. press, R. Price and S. Teukolky,Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[2] **Gravitation**, C. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, 1972, W. H. Freeman.

[3] **The Emperor's New Mind**, Concerning Computers, Minds and the Laws of Physics, Roger Penrose, 1991,Penguin Book.

[4] **Black Holes and Time Warps: Einstein outrageous legacy**, K. Thorne, 1994, W. W. Norton & Company.

[5] **Classical Theory of Gauge Fields**, V. Rubakov, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2002.

[6] **Quarks, Leptons and Gauge Fields**, K. Huang, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., 1982, Singapore National Printers.

[7] 1979, A. Brillet and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. **42**, 549.