Mecánica del Continuo y Ondas Fi31B
Tarea 9

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Jocelyn Dunstan y Pablo Gutiérrez

Problema 34 continuación...

a)Muestre que
$$\ell(\alpha) = \frac{x_1}{2\sin(\alpha/2)} - \frac{1}{2}$$
cuando $\alpha \to 0$. x_1 es el primer cero de la función de Bessel J_1.

b) Muestre que
$$\ell(\alpha) = 1 + \frac{1}{4}(\alpha - \pi)^2$$
cuando $\alpha \to \pi$.

c) Muestre que para $\alpha = \pi/2$, $\ell = 2$.

d) Determine numéricamente $\ell(\alpha)$ y compare con las dos expresiones asintóticas anteriores.

En este ejemplo uno concluye que $\ell > 1$ $\forall\alpha$, luego $|v| \sim |\nabla\phi| \sim r^{\ell-1} \to 0$, en la punta del cono, luego el campo de velocidades es siempre acotado.

Problema 35

En este problema veremos que, a differencia del caso anterior, $|v|$ diverge (ligéramente) en la punta de un cono. Considere un flujo ideal incompresible alrededor de un cono de ángulo α de apertura pero, a diferencia del problema 1 y 2, el flujo es de lado (osea paralelo a x).

a) Muestre que, por analogía al caso de un disco en dos dimensiones el potencial de velocidades debe ser porporcional a $\cos\varphi$, φ siendo el angulo azimutal en coordenadas esféricas, *i.e.* el potencial de velocidades $\phi = \cos\varphi\tilde{\phi}(r, \theta)$ (un esférico armónico con $m = 1$).

b) Demuestre que localmente el potencial de velocidades se comporta como $\phi \sim r^\ell \cos\varphi \cos\theta_2 F_1(1-\ell, \ell+2; 2; (1-\cos\theta)/2))$.

c) Usando la condición de borde de velocidad normal nula en el manto del cono en $\theta = \alpha$, encuentre una relación formal para ℓ como función de α.

d)Muestre que
$$\ell(\alpha) = 1 - \frac{1}{4}(\alpha - \pi)^2$$

cuando $\alpha \to \pi$.

e) Muestre que para $\alpha = \pi/2$, $\ell = 0$.

f) Determine numéricamente $\ell(\alpha)$ y concluya que ℓ no es una función inyectiva, que ℓ alcanza un mínimo $\ell_{min} = 0.851$ para $\alpha = 0.706\pi$.

Problema 36

i) Muestre que el potencial de velocidades complejo para el caso del flujo de un objeto en forma triangular es $(Imz > 0)$

$$\phi + i\psi = u_0\zeta(z), \quad z = \int_0^\zeta t^{-\alpha/\pi}(t-a)^{-1/2}(t-b)^{1/2+\alpha/\pi}dt$$

donde $a = F(L)$ y $b = F(L(1 + i\tan\alpha))$.

ii) Muestre existe compatibilidad con el resultado de análisis dimensional discutido en clases si $a = L\delta$ y $b = L\mu$, con δ y μ constantes complejas que dependen sólo de α.

iii) Muestre que $\phi + i\psi = u_0 z$ cuando $z \to \pm\infty$.

iii) Muestre que

$$\phi + i\psi = u_0 L\beta(z/L)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}$$

donde

$$\beta = \left(\frac{\pi - \alpha}{\pi}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} \delta^{\frac{\pi}{2(\pi-\alpha)}} \mu^{\frac{-(\pi+2\alpha)}{2(\pi-\alpha)}} e^{\frac{-i\alpha\pi}{\pi-\alpha}},$$

cuando $|z|/L \ll 1$.

Problema 37

i) Muestre que $\zeta = \coth(\pi/z)$ transforma el circulo unitario tangente al eje $Re(z)$ a la recta $Re(\zeta)$.

ii) Muestre que si un flujo $\vec{v} = u_0\hat{x}$ es realizado entonces la velocidad máxima en todo el fluido es en $z = 2i$ y vale

$$v_{max} = \frac{\pi^2}{4}u_0.$$

Entrega: Viernes 26 de octubre de 2007 en la Secretaria del 3er piso