Fi22A-3, 07-02
Fisica Estadística
Auxiliar 01

P1. Sean 3 variables x,y,z y una función f tales que:

$F(x,y,z)=0$ y $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0 \quad \forall\, u \in \{x,y,z\}$

Demuestre que: $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$

P2. Sea: $dz = (5y^2 + 3x)dx + (y^3 + 10yx)dy$

Verifique que el diferencial dz es exacto y determine $z = z(x,y)$

P3. Cuando la soldadura de referencia de un par termoeléctrico se mantiene en el punto de fusión del hielo y la soldadura de medida está a la temperatura Celsius t, la fem (voltaje) ξ del par viene dada por la ecuación:

$$\xi = 0.2t - 5*10^{-4}\, t^2$$

Suponga que se toma ξ como magnitud termométrica y que se define una escala de temperatura t* mediante la siguiente ecuación lineal:

$$t^* = a\xi + b$$

tomando $t^* = 0$ en el punto de fusión del hielo y $t^* = 100$ en el punto de ebullición del agua. Calcule los valores numericos de a y b.

P4. (P3, C1 Primavera 2006) Se ha encontrado que para el gas helio se cumple que:

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{nR}{P} + \frac{na}{\theta^2}$ y $\frac{\partial V}{\partial P} = -n\theta f(P)$ donde a=cte y f(p) una función solo de la presión P

a) Determinar la función f(P)
b) Encontrar la ecuación de estado del gas

Solución

P1. Como f(x.y.z)=0 y las derivadas parciales de la función son distintas de cero para las tres variables podemos definir:

x = x(y,z)
y = y(x,z)
z = z(x,y)

A partir de esto podemos resolver el problema de dos formas diferentes:

i) Por teorema de la función implícita podemos determinar que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

y de la misma forma: $$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Haciendo el producto de los diferenciales y simplificando obtenemos:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

ii) $$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) dz \quad (1)$$

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) dz \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) dz \right] + \frac{\partial x}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} dx + \left[\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z} \right] dz$$

Pero de las tres variables hay dos (y sólo dos) que son independientes, podemos elegir como variables independientes $x \wedge z$; la ecuación anterior debe cumplirse para todos los conjuntos de valores de dx y dz. Elegimos $dz \neq 0$ y $dx = 0$, con esto obtenemos que:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

P2. Definimos $M(x,y) = (5y^2 + 3x)$ $\quad N(x,y) = (y^3 + 10yx)$

Recordar que $M(x,y)= \frac{\partial z}{\partial x}$ y $N(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$

La condición de exactitud es: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 10y = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 10y$ $\quad\Rightarrow$ El diferencial dz es exacto

Calculemos z(x,y) para esto primero integramos la ecuación diferencial con $y = cte \Rightarrow dy=0$

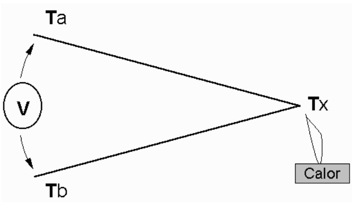
$\Rightarrow \int dz = \int (5y^2 + 3x)\, dx$
$\Rightarrow z = 5y^2x + \frac{3x^2}{2} + F(y)$ con F(y) (cte de integración) una función que depende solo de y

Ahora debemos determinar F(y)

Sabemos que: $N(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 + 10yx = 10yx + F'(y)$
$\Rightarrow F'(y) = y^3 \Rightarrow \int F'(y)\, dy = F(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + c$

$$\Rightarrow z(x,y) = 5y^2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{y^4}{4} + c$$

P3. Nota: un par termoeléctrico se ocupa para medir temperatura en un "termómetro" llamado termocupla, este se basa en el efecto Seebeck que dice que dos metales conductores diferentes conectados a una temperatura distinta a la ambiental generan una fuerza electromotriz (voltaje) por el movimiento de los electrones en su interior. De esta forma al cambiar la temperatura en la soldadura de medida Tx se genera una fem entre los terminales Ta y Tb del orden de los milivolts, al medir con un voltímetro se puede saber cual es la temperatura que se está midiendo (a mayor temperatura, mayor voltaje).



Sabemos que $\xi = 0.2t - 5{*}10^{-4}t^2$ (1) y $t^* = a\xi + b$ (2), reemplazando (1) en (2) se obtiene:

$t^* = a\,(0.2t - 5{*}10^{-4}t^2) + b$

Sabemos que $t^*=0$ corresponde a la temperatura de fusión del hielo i.e $t=0$

$\Rightarrow t^*=0=a\text{x}(0) + b = b \Rightarrow b=0$

Además $t^* = 100$ corresponde al punto de ebullición del agua i.e. $t = 100$

$\Rightarrow t^* = 100 = a\,(20 - 5) \Rightarrow a = 100/15 = 6.667$

P4. $V = V(P,\theta) \Rightarrow dV = \dfrac{\partial V}{\partial P}dP + \dfrac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$ **ocuparemos el mismo procedimiento de la P2**

a) Por ser una función de estado el diferencial debe ser necesariamente exacto,

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial P}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial V}{\partial P} \Rightarrow -\frac{nR}{P^2} = -nf(P) \Rightarrow f(P) = \frac{R}{P^2}$$

b) Primero integramos la ecuación diferencial con $\theta = cte \Rightarrow d\theta = 0$

$\Rightarrow \int dV = \int (-nR\theta/P^2)\,dP$

$\Rightarrow V = nR\theta/P + G(\theta)$ con F dependiente de θ solamente

$\Rightarrow nR/P + G'(\theta) = nR/P + na/\theta^2 \Rightarrow G'(\theta)=na/\theta^2 \Rightarrow G(\theta) = -na/\theta + cte.$

$$\Rightarrow V(P,\theta) = \frac{nR\theta}{P} - \frac{na}{\theta} + cte$$

Atte.
Rodolfo Ordoñez