Fi22A-3, 07-02

Auxiliar 7, 10-Septiembre

Máquinas térmicas (ver apunte del profesor sobre 2º Ley)

P1. Considere el ciclo térmico de Carnot. Demuestre que se cumple:

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

El ciclo de Carnot consta de 4 procesos: 2 isotérmicos y 2 adiabáticos.

Sol: Proceso a-->b-->c-->d

Proceso isotérmico a T_2:

$dQ_2 = dU + PdV$ pero $dU = c_v dT = 0$ y $P = nRT/V$

$\Rightarrow Q_2 = nRT_2 \ln(V_b/V_a)$ **(1)**

Proceso adiabático I:

Como además de adiabático es cuasiestático (reversibilidad del ciclo de Carnot), luego

$PV^{\gamma} = cte$ entonces $TV^{\gamma-1} = cte$ (verificar con ley de los gases ideales)

$T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1}$ **(2)**

Proceso isotérmico a T_1:

$Q_1 = nRT_1 \ln(V_d/V_c)$ **(3)**

Proceso adiabático II:

$T_1 V_d^{\gamma-1} = T_2 V_a^{\gamma-1}$ **(4)**

De (1) y (3)

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = nR\ln\left(\frac{V_d V_b}{V_c V_a}\right) \qquad (5)$$

De (2) y (4) obtenemos que: $V_d V_b = V_a V_c$

Reemplazando en 5 tenemos:

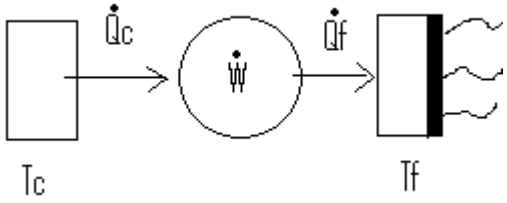
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = nR\ln\left(\frac{V_d V_b}{V_c V_a}\right) = nR\ln(1) = 0$$

$\Rightarrow Q_1/T_1 = -Q_2/T_2$

P2. Se contempla una máquina térmica de Carnot para proveer de energía eléctrica a una pequeña nave espacial que requiera de una potencia P. Suponga que la temperatura T_c de la

fuente caliente es constante. La energía entregada a la fuente fría es irradiada (considere radiación por unidad de área) por una superficie negra de área A. Se necesita mantener un estado de régimen para la fuente fría, esto es, que la superficie negra irradie tanta energía por segundo como la que recibe de la máquina para así mantener T_f constante. Determine el área A mínima como función de los parámetros P, T_c y constantes conocidas. Calcule además el rendimiento de la maquina en estas condiciones.

Sol.:



$$\eta = \frac{\dot{W}}{\dot{Q}_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \Longrightarrow \dot{Q}_c = \frac{T_c}{T_c - T_f}\dot{W}$$

Además $\dot{W} = P \Rightarrow \dot{Q}_c = \frac{T_c}{T_c - T_f}P$ (1)

Por otra parte $\frac{\dot{Q}_c}{T_c} = \frac{\dot{Q}_f}{T_f} \Longrightarrow \dot{Q}_f = \frac{T_f}{T_c}\dot{Q}_c$ (2)

De (1) y (2) $\dot{Q}_f = \frac{T_f}{T_c - T_f}P$ (3)

Pero $\dot{Q}_f = A\sigma T_f^4$ (4)

Igualando (3) y (4)

$$A\sigma T_f^4 = \frac{T_f}{T_c - T_f}P \Longrightarrow A = \frac{P}{\sigma(T_c - T_f)T_f^3}$$

Para encontrar el área mínima hacemos $\frac{dA}{dT_f} = 0$

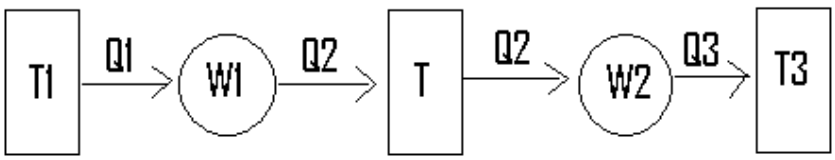
Con esto encontramos que la relación optima es $T_f = 3T_c/4$, con lo que $A_{min} = 9{,}5P/\sigma T_c^4$

Además el rendimiento obtenido es:

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0.25$$

P3. Dos maquinas térmicas de Carnot (reversibles) se disponen en serie. La máquina A absorbe calor de una fuente a 927ºC cediendo calor a una fuente a temperatura T. La segunda Máquina, recibe el calor que cede la primera cediendo a su vez calor a una fuente de 27ºC. Calcular la temperatura T para los casos en que:

i) Los trabajos W de ambas máquinas sean iguales
ii) Los rendimientos de ambas máquinas sean iguales



Sol.: Primero recordar que debemos trabajar en grados Kelvin y no Celsius con lo que:

T1 = 273 + 927 = 1200ºK

T3 = 273 + 27 = 300ºK

i) $\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ queremos trabajos iguales con lo que:

$$Q_1\left(1 - \frac{T}{T_1}\right) = Q_2(1 - \frac{T_3}{T})$$

$$\frac{Q_1}{T_1}(T_1 - T) = \frac{Q_2}{T}(T - T_3)$$

$$T_1 - T = T - T_3 \Rightarrow T = 750ºK$$

ii) Rendimientos iguales

$$1 - \frac{T}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T}$$

De aquí T = 600ºK

(la solución negativa no tiene sentido ¿por qué?)

PD: Sobre el problema de los signos (en la P1 se dedujo una relación que se uso "con signo cambiado" en P2 y P3):

El dilema radica en el signo intrínseco del calor Q2, de acuerdo a nuestra convención este es negativo por tratarse de calor cedido por la sustancia que recorre el ciclo. Esto hace que -Q2 sea una cantidad positiva, de modo que la igualdad Q1/ T1 = -Q2/T2 es correcta (T1 y T2 son positivos). Es por este motivo que se recomienda trabajar con cantidades positivas, en clases ustedes debieron haber demostrado las desigualdades ocupando el modulo de Q2 en vez de su valor. En el problema 2, se está usando //Q2// sin dejar constancia de ello, es decir, considerando directamente Q2 como positivo. En el apunte del profesor se explica un poco más.

Ecuaciones de Maxwell, Función de Helmholtz, ecuaciones TdS….

dU = TdS – PdV (I)

dH= TdS + VdP (II)

dA = -SdT – PdV (III)

dG = -SdT + VdP (IV)

Como estas cuatro ecuaciones corresponden a funciones de estado sus diferenciales son exactos con la condición de exactitud conseguimos las cuatro relaciones de Maxwell.

P4. La función de Helmholtz para un mol de un cierto gas es:

$$A = -(a/V) - RT\ln(V-b) + f(T)$$

Con a y b constantes y f(T) una función de la temperatura solamente. Determine la ecuación de estado del gas.

Sol.: consideramos A = A(V,T)

Asi $dA = \frac{\partial A}{\partial V} dV + \frac{\partial A}{\partial T} dT$

Igualando los diferenciales con (III) obtenemos:

$$\frac{\partial A}{\partial V} = -P = \frac{a}{V^2} - \frac{RT}{v-b}$$

P5. Demuestre que:

i)En un proceso isotérmico reversible la variación de la función de Helmholtz es igual al trabajo realizado sobre el sistema

ii)En un proceso isotérmico, isocorico y reversible la función de Helmholtz es constante

Sol.: Deduzcamos primero la ecuación III (a modo de ejemplo)

Por definición A= U – TS

dA=dU –TdS -SdT

pero dU = TdS – PdV

dA= TdS – PdV – TdS –SdT = -PdV – SdT

i)Proceso isotérmico T= cte, dT=0

$\Rightarrow dA = -PdV \Rightarrow \Delta A = -\int_i^f PdV$ el signo (-) indica que el trabajo es sobre el sistema

ii)Isotérmico e isocorico dT=dV=0 $\Rightarrow$dA = 0 $\Rightarrow$A=cte

El hecho de que el proceso sea reversible lo ocupamos al deducir la expresión III, ya que el hecho que sea reversible nos asegura que el proceso es cuasi estático y podemos ocupar la forma diferencial de las leyes.

P6. A)Demuestre las dos ecuaciones TdS

B) Considere un gas que cumple la ecuación de Van der Waals experimenta una expansión isotérmica reversible desde un volumen V_i a un volumen V_f. Calcule la transferencia de calor del proceso

C)Considere 1 mol de mercurio a 0º que aumente su presión desde 0 a 1000 atmosferas reversible, isotérmica e isocoricamente. Calcule Q y W. Considere que la densidad volumétrica molar es 14,7 (cm3/mol), β=178*10^{-6}(grado^{-1}), k=3.84-10^{-12}(cm^2/dina) y 1atm=1.013*10^6(dina/cm^2).

Sol.: A) Consideremos S = S(T,V)

$dS = \frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial V}dV$ /*T

$TdS = T * \frac{\partial S}{\partial T}dT + T * \frac{\partial S}{\partial V}dV$

Pero $T * \frac{\partial S}{\partial T} = C_v$

Y además a partir de III considerando diferencial exacto $\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial T}$

$\Rightarrow TdS = C_v dT + T * \frac{\partial P}{\partial T}dV$ (Primera TdS)

Consideremos ahora S = S (T,P) y ocupando el mismo procedimiento anterior:

$TdS = T * \frac{\partial S}{\partial T}dT + T * \frac{\partial S}{\partial P}dP$

Pero $T * \frac{\partial S}{\partial T} = C_P$

Y además a partir de IV considerando el diferencial exacto $\frac{\partial S}{\partial P} = -\frac{\partial V}{\partial T}$

$\Longrightarrow TdS = C_P dT - T * \frac{\partial V}{\partial T}dP$ (Segunda TdS)

B) Ocupamos la primera ecuación TdS y la ecuación de Van der Waals:

$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V-b}$

Asi: $TdS = C_v dT + T * \frac{R}{V-b}dV$

Pero a T=cte, dT=0 y además dQ=TdS

$\Rightarrow Q = \int_{V_i}^{V_f} \frac{TR}{V-b}dV = RTln(\frac{V_f - b}{V_i - b})$

C) Ocupando la 2º TdS nuevamente T = cte, dT = 0

$TdS = dQ = -T * \frac{\partial V}{\partial T}dP$

Pero β= $\frac{\partial V}{V\partial T}$

$\Rightarrow Q = -T\int V\beta dP = -TV\bar{\beta}(P_f - P_i) = -17.3\ cal$

$$W = \int PdV$$

Considerando V=V(P,T)

$dV = \frac{\partial V}{\partial T}dT + \frac{\partial V}{\partial P}dP$ pero dT=0

$$W = \int \frac{\partial V}{\partial P}PdP$$

Pero k= $-\frac{\partial V}{V\partial P}$

$\Rightarrow W = -VK\int PdP = -0.687\ cal$

Notas: Los coeficientes β y k pueden considerarse como constantes ya que empíricamente se ha demostrado que la variación de ambos con la variación de presión dada no es mas del 3%. Lo mismo pasa con el volumen. Además los resultados indican gran diferencia entre el trabajo y el calor, esta diferencia proviene de la reserva de energía interna(primera ley de la termodinámica)

P7. La función especifica (molar) de Gibbs de un gas viene dada por:

g=RTln(P/Po) – FP con F función exclusiva de T

Determine la ecuación de estado del gas y su entropía específica

Sol.: Considerando g=g(T,P)

$$dg = \frac{\partial g}{\partial T}dT + \frac{\partial g}{\partial P}dP$$

Igualando los diferenciales con IV

$$\frac{\partial g}{\partial P} = V = \frac{RT}{P} - F \Longrightarrow P(F+V) = RT$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} = -s \Longrightarrow s = -Rln\left(\frac{P}{Po}\right) + F'P$$

Propuesto: encontrar expresiones para la energía interna (u), entalpia(h) y función de Helmholtz(a).

Atte

Rodolfo Ordoñez