Fi22A-3, 07-02

Auxiliar 5, 27-Agosto

Resumen

Existen tres formas de transferencia de calor:

- **Conducción**: basado en el contacto directo de sus partículas sin flujo neto de materia y que tiende a igualar la temperatura dentro de un cuerpo y entre diferentes cuerpos en contacto.

- **Radiación:** propagación de energía en forma de ondas electromagnéticas a través del vacío o de un medio fluido.

- **Convección**: se produce a través del desplazamiento de partículas entre regiones con diferentes temperaturas. Se produce únicamente en materiales fluidos.

Conducción: $\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{d\theta}{dx}$

donde k es la conductividad térmica y A el area superficial del cuerpo

Radiación: $R_N = \sigma\alpha\theta^4$ Ley de Stefan-Boltzmann (para un cuerpo que emite potencia)

donde R_N es la potencia emitida por unidad de área de un cuerpo negro con coeficiente de absorción α

$\frac{dQ}{dt} = A\alpha\sigma\left(\theta_p^4 - \theta^4\right)$ (para un cuerpo dentro de una cavidad con diferente T)

Donde α es el coeficiente de absorción y σ la constante de Stefan-Boltzmann

Convección: $\frac{dQ}{dt} = hA\Delta T$

Donde h es un coeficiente de convección y Δt la diferencia de temperaturas entre la superficie y la masa de fluido

Problemas

P1. Suponer que en un cilindro hueco de radio interior a y radio exterior b tiene lugar un fenómeno de conducción de calor a una velocidad constante $\dot{Q}$. Demostrar que para un cilindro de longitud L y conductividad térmica constante K, la diferencia de temperatura entre las dos caras de la pared es :$\theta_1 - \theta_2 = \frac{\dot{Q}}{2\pi LK} ln\frac{b}{a}$

P2. Se tiene la ecuación de difusión $\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{\rho C_p}\frac{d^2\theta}{dx^2}$ para una barra de largo L. Demuestre que en estado estacionario ($\frac{d\theta}{dt} = 0$) la temperatura decrece linealmente a lo largo de la barra. Considere que la temperatura en el inico de la barra es θ_2 y que al final de la barra es θ_1

P3. Calor fluye radialmente hacia afuera a través de la pared de un tubo aislante cilíndrico de radio interior a y radio exterior 2. Si la temperatura de las correspondientes paredes interna y externa son T_1 y T_2 respectivamente, determinar la distancia radial desde el eje del tubo hasta la superficie cilíndrica isotérmica para la que la temperatura tiene le valor: $(T_1 + T_2)/2$

P4. Un cuerpo pequeño de temperatura T, coeficiente de absorción α y area superficial A, se coloca en el interior de una cavidad al vacío cuyas paredes se encuentran a una temperatura T_p constante.

a) Si la diferencia $T_p - T$ es pequeña, demostrar que la velocidad de transferencia de calor por radiación es **aproximadamente** igual a:

$$\frac{dQ}{dt} = 4T_p^3 A\alpha\sigma(T_p - T)$$

b) Si el cuerpo permanece a presión constante, demostrar que el tiempo necesario para que el cuerpo varíe su temperatura de T_1 a T_2 es:

$$t = \frac{C_p}{4T_p^3 A\alpha\sigma} Ln\frac{T_p - T_1}{T_p - T_2}$$

P5. Suponga que la superficie del sol emite radiación como si fuese un cuerpo negro perfecto. Sabiendo que el radio del sol es R_s, que la distancia entre la tierra y el sol es R y que la potencia por unidad de área que llega a la tierra es I estime la temperatura de la superficie del sol.

Solución

P1. $\dot{Q} = -kA\frac{d\theta}{dx}$

$\Rightarrow \dot{Q} = -2\pi rLk\frac{d\theta}{dr}$

$\Rightarrow \dot{Q}\int_a^b \frac{dr}{r} = -2\pi kL\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$

$\Rightarrow \dot{Q}\, ln\frac{b}{a} = -2\pi kL(\theta_2 - \theta_1)$

$\Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = \frac{\dot{Q}}{2\pi KL} ln\frac{b}{a}$

P2. Al hacer la derivada cero en la ecuación de difusión obtenemos que:

$\frac{d\theta}{dx} = cte \Rightarrow \theta = cx + a \quad con\ c\ y\ a\ constantes$

Aplicando las condiciones en x=0 y x=L

Obtenemos $\theta = \theta_2 - \frac{\theta_2 - \vartheta_1}{L}x$

Esto significa que la temperatura decrece linealmente a lo largo de la barra

P3. Supondremos una sección del cilindro de largo l, con esto obtenemos la misma ecuación de la pregunta 1 cuando tomamos todo el radio del cilindro,

$$\dot{Q}\, ln\frac{b}{a} = -2\pi kl(\theta_2 - \theta_1)$$

Nos interesa encontrar el punto r donde la temperatura es el promedio de ambas, haciendo el mismo procedimiento (agrupando e integrando) obtenemos:

$$\dot{Q}\, ln\frac{r}{a} = 2\pi kl\left(\theta_1 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

Igualando ambas expresiones para $\dot{Q}$ obtenemos:

$$\frac{2\pi kl}{ln\frac{b}{a}}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\frac{2\pi kl}{ln\frac{r}{a}}(\theta_1 - \theta_2)}{2}$$

$$\Rightarrow 2ln\frac{r}{a} = ln\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \sqrt[2]{ab} = r$$

P4. a) Sea $T_p - T = \delta$ (pequeño)

Luego $T^4 = (T_p - \delta)^4 = T_p^4(1 - \delta/T_p)^4$

Ocupamos $(1+x)^n \approx 1-nx$ cuando $x<<1$

$\Rightarrow T_p^4 - T^4 \approx 4T_p^3(T_p - T)$

$\Rightarrow \dot{Q} \approx 4A\alpha\sigma T_p^3(T_p - T)$

b)Sabemos que $dQ = C_p dT$

$\Rightarrow C_P dT = 4A\alpha\sigma T_p^3(T_p - T)dt$

Integrando obtenemos $t = \frac{C_P}{4A\alpha\sigma T_p^3} ln \frac{T_P - T_1}{T_p - T_2}$

P5. La potencia por unidad de area que llega a la tierra es I, por lo tanto, la potencia total irradiada por el Sol es:

$P = 4\pi R^2 I$

A la vez por Stefan-Boltzmann

$P = A\sigma\alpha T^4$ pero $\alpha=1$ (cuerpo negro)

$\Rightarrow 4\pi R^2 I = 4\pi R_s^2 \sigma T^4$

$\Rightarrow T^4 = \frac{I}{\sigma}(\frac{R}{Rs})^2$

Tarea: vean que tan buena es esta estimación buscando datos numéricos