

FÍSICA ESTADÍSTICA.

PROFESOR: PATRICIO MARTENS

PROFESORES AUXILIARES: RODOLFO ORDÓÑEZ
ALEXIS SÁEZ URIBE.

CLASE AUXILIAR # 4.

REPASO. (TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES IDEALES).

$$n = \frac{N}{V}, \quad N: \text{n}^\circ \text{ PARTÍCULAS}, \quad V: \text{VOLUMEN}, \quad n: \text{DENSIDAD DE PARTÍCULAS}.$$

$$n^\circ \text{ de moles} = \frac{N}{N_0}, \quad N_0 = 6,02 \times 10^{23} [\text{1/mol}] \quad (\text{n}^\circ \text{ AVOGADRO}).$$

$$dn_f = A n f(f) df, \quad A: \text{cte de proporcionalidad o de normalización.}$$

$f(f)$: FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN.

dn_f : n° MEDIO DE PARTÍCULAS POR UNIDAD DE VOLUMEN QUE TIENEN SUS VALORES DE f COMPRENDIDOS ENTRE f Y $f + df$.

$$\Rightarrow \left(\int_0^{+\infty} () \right)$$

$$N = A N \int_0^{+\infty} f(f) df$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\int_0^{+\infty} f(f) df}.$$

$$\text{VALOR MEDIO: } \langle f \rangle = \int_0^{+\infty} f f(f) df.$$

$$\text{VALOR MEDIO CUADRÁTICO: } \langle f^2 \rangle = \int_0^{+\infty} f^2 f(f) df$$

$$\text{CASO GENERAL: } \langle g(f) \rangle = \int_0^{+\infty} g(f) f(f) df$$

NOTA: Suponemos valores de f entre 0 y $+\infty$.

DISTRIBUCIÓN DE CAMINOS LIBRES:

$$\text{PROBABILIDAD DE QUE LA PARTÍCULA CHOQUE EN } dx = \frac{dx}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi \sigma^2}$$

σ : DIÁMETRO DE LA PARTÍCULA.

$P(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}$, $P(x)$: Pbb DE QUE UNA PARTÍCULA TENGA UN CAMINO LIBRE MAYOR QUE UN CIERTO x .
 i.e., QUE NO CHOQUE EN UN CAMINO DE LARGO x .

$dn_x = \frac{n}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$ (DISTRIBUCIÓN DE CAMINOS LIBRES).

dn_x : n° MEDIO DE PARTÍCULAS POR UNIDAD DE VOLUMEN CON VALORES DE x COMPRENDIDOS ENTRE x Y $x+dx$.
 $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$ (FN. DE DISTRIBUCIÓN) (¡ESTA NORMALIZADA!).

$\langle x \rangle = \lambda$ (CAMINO LIBRE MEDIO).

N° DE CHOQUES CON LA PARED.

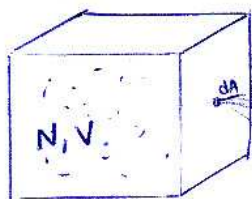
n° DE CHOQUES EN da DE PARTÍCULAS CON VELOCIDADES ENTRE v Y $v+dv$ EN dt = $\frac{1}{4} v dn_v da dt$.

$\Rightarrow$ (INTEGRANDO TODAS LAS VELOCIDADES Y RECORDANDO QUE $\int_0^{+\infty} v dn_v = n \langle v \rangle$)

$Q = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$: n° DE CHOQUES POR UNIDAD DE ÁREA Y UNIDAD DE TIEMPO. (i.e. $da = dt = 1$).

$Q' = \frac{1}{4} n \langle v \rangle da dt$: n° MEDIO DE CHOQUES CON da EN dt .

EFUSIÓN:



$dN = -\frac{1}{4} \frac{N}{V} \langle v \rangle da dt$.

N : n° DE PARTÍCULAS QUE SALEN POR da EN dt .

NOTA: Si las partículas entran $dN = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \langle v \rangle da dt$ pero $N, V, \langle v \rangle$ son del medio exterior.

Presión DEL GAS.

$P = \frac{1}{3} m \cdot n \langle v^2 \rangle$, m : MASA DE 1 PARTÍCULA. $\leadsto$ $P = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle$.

$\wedge v_{cm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$

P1

PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MAXWELL-BOLTZMANN

$$f(v) = A v^2 e^{-\frac{m}{2KT} v^2}, \quad v \geq 0 \quad (\text{FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN}).$$

a) CALCULAR A (CTE DE NORMALIZACIÓN)

b) CALCULAR v_{mp} , $\langle v \rangle$ Y v_{cm} .

INFORMACIÓN ADICIONAL.

$$f(n) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx$$

n	0	1	2	3	4	5
f(n)	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$	$\frac{1}{2a}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$	$\frac{1}{a^3}$

Solución /

a) TENEMOS QUE: $dN_v = n \cdot A v^2 e^{-\frac{m}{2KT} v^2} / \int()$.

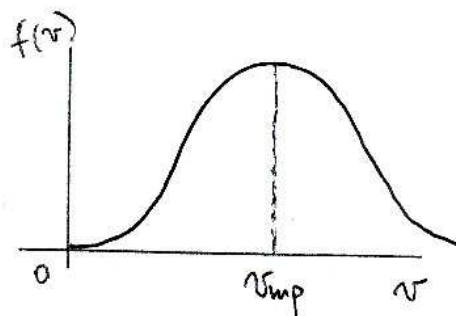
$$\Rightarrow \int dN_v = nA \int_0^{+\infty} v^2 e^{-\frac{m}{2KT} v^2} dv \Rightarrow N = nA \cdot f(2), \text{ con } a = \frac{m}{2KT}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{f(2)} \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{m}{2KT}\right)^3}}} \Rightarrow A = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{m}{2KT}\right)^{3/2}$$

b) v_{mp} : valor mas probable.

Si GRAFICAMOS $f(v)$ TENEMOS QUE:

Por lo que v_{mp} es el MÁXIMO DE LA FUNCIÓN.



$$\text{Así } \frac{df_v(v_{mp})}{dv} = 0 \Rightarrow \cancel{2v e^{-\frac{m}{2KT} v^2}} + v^2 \cdot \left(-\frac{m}{2KT}\right) \cancel{2v e^{-\frac{m}{2KT} v^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{m}{2KT} v^2 = 0 \Rightarrow v_{mp} = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

$\langle v \rangle$: velocidad media.

tenemos que: $\langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v f(v) dv$, con $f(v)$ normalizada.

$$\Rightarrow \langle v \rangle = \int_0^{+\infty} v \cdot A v^2 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv = A \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv = A \cdot f(3)$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2kT}}{\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

v_{cm} : velocidad cuadrática media.

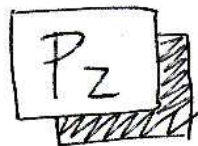
tenemos que $v_{cm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$

Ahora... $\langle v^2 \rangle = \int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv = \int_0^{+\infty} A v^4 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv$
 $= A \cdot f(4)$

$$\Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{m}{2kT} \right)^5}}$$

$$\Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2kT}{m} \right)^{5/2} \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

$$\Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$



Por un pequeño orificio practicado en la pared de una cámara que contiene un gas a la temperatura T escapan partículas al exterior

a) Demostrar que el n.º medio de partículas con velocidades entre v y $v+dv$ que escapan por unidad de área y unidad de tiempo es:

$$dN = \pi n \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv$$

- b) Calcular el N° total de partículas que escapan por unidad de área y unidad de tiempo. Compare con $Q = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$.
- c) Determinar la distribución de velocidades de las partículas que salen por el orificio.
- d) Demuestre que las velocidades media y cuadrática media de las partículas que salen de la cámara son:

$$v_m = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \quad \text{y} \quad v_{cm} = \sqrt{\frac{4kT}{m}}$$

NOTA: Usar la tabla del problema anterior y considerar que en el interior de la cámara la distribución es de Maxwell-Boltzmann.

Solución. /

- a) Recordamos que: N° de choques en dA de partículas con velocidades entre v y $v+dv$ en dt $= \frac{1}{4} v d\eta_v dA dt$

Como queremos por unidad de área y de tiempo $\Rightarrow dA = dt = 1$.

De esta forma interpretamos cada choque como una partícula que pasa por el orificio (tomamos la porción de área en este lugar.)

Así...

$$dN = \frac{1}{4} v \cdot 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv$$

$$\Rightarrow dN = \pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv //$$

- b) Para esto integramos en todo el espacio, de esta forma incluimos según su velocidad todas las partículas. i.e.

$$N = \pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv$$

$$\Rightarrow N = \pi h \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} f(3) = \pi h \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{m}{2kT} \right)^2}$$

$$\Rightarrow N = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2kT}}{2\sqrt{m}} \Rightarrow N = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} //$$

y vemos que $N = \frac{1}{4} h \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{1}{4} h \langle v \rangle = Q$

c) LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DEBE cumplir que:

$$dN = N f(v) dv, \text{ con } f(v) \text{ NORMALIZADA o BIEN POR NORMALIZAR.}$$

ahora sabemos que: $dN = \pi h \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^3 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv$ ⊗

y de la parte b) tenemos que:

$$N = \pi h \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2 \left(\frac{m}{2kT} \right)^2} \Rightarrow \pi h \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} = 2N \left(\frac{m}{2kT} \right)^2$$

Reemplazando esto en ⊗.

$$dN = 2N \left(\frac{m}{2kT} \right)^2 v^3 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv$$

Así... $f(v) = 2 \left(\frac{m}{2kT} \right)^2 v^3 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} //$

d) YA TENEMOS LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN, luego:

$$v_m = \int_0^{+\infty} v \cdot f(v) dv$$

y $v_{cm} = \left(\int_0^{+\infty} v^2 f(v) dv \right)^{1/2}$, Propuestos! //

P3

LA DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES DE UN GAS FICTICIO DE N PARTÍCULAS MONOATÓMICAS DE MASAS m CONFINADAS EN 1 CÁMARA DE VOLUMEN V ES:

$$dN_v = \begin{cases} N A v (v_0 - v) dv, & 0 \leq v \leq v_0 \\ 0, & v > v_0. \end{cases}$$

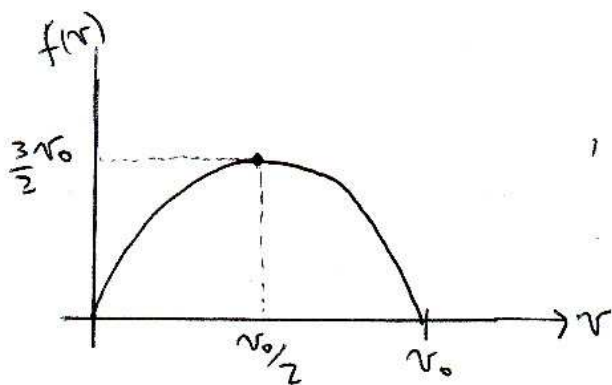
, DONDE v_0 ES 1 CTE CONOCIDA Y v LA RAPIDEZ DE LAS PARTÍCULAS.

- Calcular la cte de Normalización A .
- GRAFICAR LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN $f(v)$.
- Calcular v_{mp} , v_m y v_{cm} .
- Calcular el n° de choques con la pared por unidad de área y de tiempo.
- Calcular la presión que ejerce el gas sobre las paredes.
- Calcular el tiempo que debe transcurrir para que la presión correspondiente a un cierto instante disminuya a la mitad, debido al escape de partículas al exterior por un pequeño orificio de área da en una de las paredes de la cámara.

Solución /

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad dN_v &= N A v (v_0 - v) dv, \quad 0 \leq v \leq v_0 \\ \Rightarrow \int dN_v &= N A \int_0^{v_0} v (v_0 - v) dv \Rightarrow N = N A \left[v_0 \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_0^3}{3} \right] \\ \Rightarrow 1 &= A v_0^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \Rightarrow 1 = A v_0^3 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \underline{A = \frac{6}{v_0^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad f(v) \text{ cumple que } dN_v &= N f(v) dv \\ \Rightarrow f(v) &= \frac{6}{v_0^3} v (v_0 - v) \end{aligned}$$



c) Del gráfico anterior vemos que $v_{mp} = \frac{v_0}{2}$

Ahora... $\langle v \rangle = \int_0^{v_0} v \cdot f(v) dv = \int_0^{v_0} \frac{6}{v_0^3} v^2 (v_0 - v) dv = \frac{6}{v_0^3} \left[v_0 \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} \right]$

$$= 6v_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 6v_0 \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow \langle v \rangle = \frac{v_0}{2}$$

y $\langle v^2 \rangle = \int_0^{v_0} v^2 f(v) dv = \frac{6}{v_0^3} \int_0^{v_0} v^3 (v_0 - v) dv$

$$= \frac{6}{v_0^3} \left[v_0 \frac{v^4}{4} - \frac{v^5}{5} \right] = 6v_0^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6v_0^2}{20}$$

$$\Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{3v_0^2}{10} \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{3}{10}} v_0$$

d) $Q = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$ y $n = \frac{N}{V} \Rightarrow Q = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \cdot \frac{v_0}{2} = \frac{Nv_0}{8V}$

e) $P = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \left(\sqrt{\frac{3}{10}} v_0 \right)^2 = \frac{m N v_0^2}{10V}$

f) tenemos que $P = \frac{m N v_0^2}{10V}$, Ahora para un cierto instante...

, dividiendo las dos ecuaciones

$$P_i = \frac{m N_i v_0^2}{10V}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P_i} = \frac{N}{N_i}, \text{ Ahora... El n}^\circ \text{ de partículas que salen por dA en dt es:}$$

$$dN = - \frac{1}{4} \frac{N}{V} \cdot \frac{v_0}{2} dA dt \Rightarrow \int_N^{N(t)} \frac{dN}{N} = \int_0^t - \frac{v_0 dA \cdot dt}{8V}$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_i}\right) = -\frac{v_0 dA}{8V} t \Rightarrow N(t) = N_i e^{-\frac{v_0 dA}{8V} t}$$

$$\text{Así... } \frac{P}{P_i} = \frac{N_i}{N_i} e^{-\frac{v_0 dA}{8V} t} \Rightarrow P(t) = P_i e^{-\frac{v_0 dA}{8V} t}$$

$$\text{Y } P(t_*) = \frac{P_i}{2} \Rightarrow \frac{P_i}{2} = P_i e^{-\frac{v_0 dA}{8V} t_*} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{v_0 dA}{8V} t_*$$

$$\Rightarrow -\ln(2) = -\frac{v_0 dA}{8V} t_* \Rightarrow t_* = \frac{8V \ln(2)}{v_0 dA}$$

P4 Para cierto GAS, que se encuentra dentro de un casco esférico de radio interior a , se sabe que la probabilidad de que una partícula que pasa por el centro pueda volver a este sin chocar con otras partículas es igual a $\frac{1}{4}$. Las partículas de este GAS tienen un diámetro σ y están a una temperatura T .

Demstrar que la presión de este GAS es:

$$P = \frac{\ln(4) KT}{2\sqrt{2} \pi \sigma^2 a}, \quad K = \frac{R}{N_0}, \text{ CTE DE BOLTZMANN.}$$

Solución / Como las partículas se desplazan en trayectorias lineales entonces las que pasan por el centro siguen una trayectoria radial y al chocar con la superficie se devuelven radialmente.

Sabemos que la pbb de que una partícula no choque en un camino de largo x es:

$P(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}$, Así para salir desde el centro y volver a este $x = 2a$ (a radio interior).

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\frac{2a}{\lambda}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2a}{\lambda}$$

$$\Rightarrow -\ln(4) = \frac{-2a}{\lambda} \Rightarrow \ln(4) = 2a \cdot \sqrt{2} n \pi \sigma^2 \quad \textcircled{*}$$

Ahora como es un gas ideal $\Rightarrow PV = nRT$, pero
 OJO! este n es n° de moles y el otro densidad
 de partículas.

$$\text{Se tiene que } n(\text{n° moles}) = \frac{N}{N_0}$$

$$\Rightarrow PV = \frac{N}{N_0} RT \Rightarrow P = \frac{N}{V} \frac{R}{N_0} T \Rightarrow P = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DENSIDAD DE} \\ \text{PARTÍCULAS}}}{n} KT$$

$$\text{y de } \textcircled{*} \quad n = \frac{\ln(4)}{2\sqrt{2}\pi\sigma^2 a} \Rightarrow P = \frac{\ln(4)KT}{2\sqrt{2}\pi\sigma^2 a}.$$

P5 EN el aire, de densidad de partículas constante N_0 ,
 se encuentra suspendido un cubo hueco de paredes
 delgadas y volumen V , donde inicialmente hay N_0 partí-
 culas ($N_0 \ll n_0 V$). Por diversos agujeros muy pequeños
 que totalizan un área Ω comienza a entrar aire
 al interior del cubo. Determinar la variación de
 la presión en el interior en función del tiempo,
 sabiendo que la temperatura ambiente es T_0 .

Nota: El aire sigue una distribución de Maxwell-Boltzmann.

Solución / En este problema al tener datos del
 medio exterior y al no suponer que la
 presión afuera es muy baja, debemos considerar
 tanto las partículas que salen del cubo como las
 que entran, i.e.

$$dN = -\frac{1}{4} \frac{N}{V} \langle v \rangle \Omega dt + \frac{1}{4} N_0 \langle v \rangle \Omega dt$$

y $\langle v \rangle$ son los mismos pues $\langle v \rangle_{\text{aire}} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$ y T es el mismo
 (T_0).

$$\Rightarrow dN = -\frac{1}{4} \langle v \rangle \Omega dt \left(\frac{N}{V} - n_0 \right)$$

$$\Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{\left(\frac{N}{V} - n_0 \right)} = \int_0^t -\frac{1}{4} \langle v \rangle \Omega dt \Rightarrow v \ln \left(\frac{N}{V} - n_0 \right) \Big|_{N_0}^N = -\frac{1}{4} \langle v \rangle \Omega t$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\frac{N}{V} - n_0}{\frac{N_0}{V} - n_0} \right) = -\frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle \Omega t}{V}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{N}{V} - n_0}{\frac{N_0}{V} - n_0} = e^{-\frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle \Omega t}{V}} \Rightarrow \frac{\frac{N}{V} - n_0}{-n_0} = e^{-\frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle \Omega t}{V}}$$

$\frac{N_0 - n_0 V}{V} \approx -\frac{n_0 V}{V} = -n_0$
 $\downarrow$
 pes $N_0 \ll n_0 V$

$$\Rightarrow \frac{N}{V} = n_0 - n_0 e^{-\frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle \Omega t}{V}}$$

$$\Rightarrow N(t) = n_0 V \left(1 - e^{-\frac{\langle v \rangle \Omega t}{4V}} \right)$$

Ahora ... $p = \frac{1}{3} m n \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} m \cdot \frac{N}{V} \langle v^2 \rangle$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{3} m n_0 \langle v^2 \rangle \left(1 - e^{-\frac{\langle v \rangle \Omega t}{4V}} \right)$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{3} m \cdot n_0 \cdot \frac{3KT_0}{m} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{8KT_0} \Omega t}{4V \sqrt{\pi m}}} \right)$$

$$\Rightarrow p(t) = n_0 K T_0 \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{8KT_0} \Omega t}{4V \sqrt{\pi m}}} \right)$$

P6 El camino libre medio de un gas de Helio a $p = 1 \text{ atm}$ y $T = 20^\circ \text{C}$ es $20 \times 10^{-8} \text{ m}$.

ENCENTRAR EL RADIO DEL ÁTOMO DE Helio. Considere este como GAS IDEAL.

Solución

tenemos que: $\langle x \rangle = \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi \sigma^2} = 20 \times 10^{-8} \text{ m}$ $\otimes$

Además $PV = n'RT$, n' : n° moles $\Rightarrow PV = \frac{N}{N_0} RT$

$$\Rightarrow P = \frac{N}{V} \frac{R}{N_0} T \Rightarrow P = nKT, K = 1,38 \times 10^{-23} \left[\frac{J}{K} \right]$$

$$\Rightarrow n = \frac{P}{KT}, \text{ Reemplazando en } \oplus$$

$$20 \times 10^{-8} m = \frac{1}{\sqrt{2} \frac{P}{KT} \pi \sigma^2} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{KT}{20 \times 10^{-8} m \cdot \sqrt{2} P \pi}$$

$$\text{Y finalmente } v = \frac{\sigma}{2} //$$

P7 EN EL INTERIOR DE UN CILINDRO HORIZONTAL DE ÁREA A HAY INICIALMENTE N_0 ÁTOMOS DE UN GAS IDEAL OCUPANDO UN VOLUMEN V_0 DEFINIDO POR LA POSICIÓN DE UN ÉMBOLO. EN UN DETERMINADO INSTANTE SE ABRE UN PEQUEÑO ORIFICIO DE ÁREA Ω EN EL EXTREMO FIJO DEL CILINDRO. SIMULTÁNEAMENTE EL ÉMBOLO COMIENZA A DESPLAZARSE CON RAPIDEZ CONSTANTE u_0 , REDUCIENDO EL VOLUMEN INTERNO.

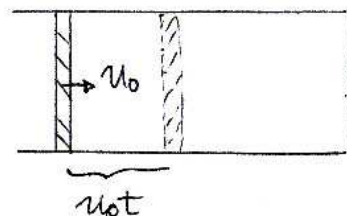
DETERMINAR LA RELACIÓN QUE DEBE EXISTIR ENTRE LA RAPIDEZ u_0 Y LA VELOCIDAD MEDIA $\langle v \rangle$ DE LAS PARTÍCULAS PARA QUE EN EL MOMENTO EN QUE EL VOLUMEN SE HAYA REDUCIDO A LA MITAD, EL N° DE PARTÍCULAS QUE HAY EN EL INTERIOR SEA IGUAL AL 50% DEL N° ORIGINAL.

NOTA: LA TEMPERATURA DE LAS PAREDES DEL CILINDRO ES MANTENIDA CONSTANTE Y LA PRESIÓN EXTERIOR ES MUY BAJA.

Solución

TENEMOS QUE $dN = -\frac{1}{4} \frac{N}{V} \Omega \langle v \rangle dt$, LA DIFERENCIA DE ESTA PREGUNTA CON LAS ANTERIORES ES QUE EL VOLUMEN VARIA CON EL TIEMPO.

$$V(t) = V_0 - A \underbrace{u_0 t}_{\text{DISTANCIA QUE BARRA EL ÉMBOLO.}}$$



$\Rightarrow dN = -\frac{1}{4} \frac{N \langle v \rangle \Omega}{V(t)} dt$, como la part es muy BAJA entonces NO ENTAN PARTÍCULAS A LA CÁMARA.

$$\Rightarrow \int_{N_0}^{N_0/2} \frac{dN}{N} = \int_0^{t_f} -\frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle \Omega}{V_0 - A u_0 t} dt$$

Alhora t_f cumple que:

$$\frac{V_0}{2} = V_0 - A u_0 t_f$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{N_0}{2N_0}\right) = -\frac{1}{4} \langle v \rangle \Omega \cdot \frac{1}{A u_0} \ln(V_0 - A u_0 t) \Big|_0^{t_f} \Rightarrow t_f = \frac{V_0}{2 A u_0}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\langle v \rangle \Omega}{4 A u_0} \cdot \ln\left(\frac{V_0 - A u_0 \cdot \frac{V_0}{2 A u_0}}{V_0}\right)$$

$$\Rightarrow -\ln(2) = \frac{\langle v \rangle \Omega}{4 A u_0} \cdot \ln\left(\frac{V_0}{2 V_0}\right) \Rightarrow -\ln(2) = \frac{\langle v \rangle \Omega}{4 A u_0} \cdot (-\ln(2))$$

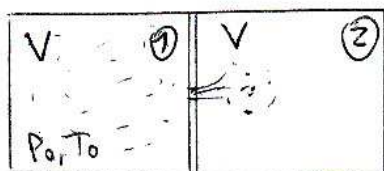
$$\Rightarrow \frac{\langle v \rangle}{u_0} = \frac{4 A}{\Omega}$$

P8

Un recipiente de volumen $2V$ queda dividido por un tabique intermedio en dos cámaras iguales. La de la izquierda contiene un gas ideal en equilibrio a la presión P_0 y temperatura T_0 . La de la derecha se encuentra en el vacío. Se practica un agujero muy fino en el tabique intermedio por el que comienza a pasar gas a la otra cámara.

NOTA: Considerar que $N_1 + N_2 = N$, donde N_1 es el n° de partículas en el lado izquierdo en el instante t ; N_2 las del lado derecho en ese mismo instante, siendo N el n° total de partículas. Considerar además que partículas pasan en ambos sentidos entre las cámaras.

Solución



inicialmente:

$$P_0 V = \frac{N}{N_0} R T_0, \quad N_0: \text{n}^\circ \text{AVOGADRO.}$$

$$\Rightarrow N = \frac{N_0 P_0 V}{R T_0}$$

Así PARA LA CAMARA 1 //

$$dN_1 = -\frac{1}{4} \frac{N_1}{V} \langle v \rangle dA dt + \frac{1}{4} \frac{N_2}{V} \langle v \rangle dA dt$$

$$\text{y } N_1 + N_2 = N \Rightarrow N_2 = N - N_1$$

$$\Rightarrow dN_1 = -\frac{1}{4} \frac{N_1}{V} \langle v \rangle dA dt + \frac{1}{4} \frac{(N - N_1)}{V} \langle v \rangle dA dt$$
$$= \frac{1}{4} \frac{(N - 2N_1)}{V} \langle v \rangle dA dt$$

$$\Rightarrow \int_N^{N_1} \frac{dN_1}{(N - 2N_1)} = \int_0^t \frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle dA dt}{V} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{N - 2N_1}{N - 2N} \right) = \frac{1}{4} \frac{\langle v \rangle dA t}{V}$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{N - 2N_1}{-N} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\langle v \rangle dA t}{V} \Rightarrow N - 2N_1 = -N e^{-\frac{\langle v \rangle dA t}{2V}}$$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{N}{2} (1 + e^{-\frac{\langle v \rangle dA t}{2V}})$$

$$\text{y como } p = \frac{1}{3} m \cdot n \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} m \cdot \frac{N_1}{V} \langle v^2 \rangle$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{3} m \cdot \frac{N}{2} (1 + e^{-\frac{\langle v \rangle dA t}{2V}}) \frac{\langle v^2 \rangle}{V}$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{1}{3} m \cdot \frac{N_0 P_0 V}{2RT_0} \cdot \frac{\langle v^2 \rangle}{V} (1 + e^{-\frac{\langle v \rangle dA t}{2V}})$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{m N_0 P_0 \langle v^2 \rangle}{6RT_0} (1 + e^{-\frac{\langle v \rangle dA t}{2V}})$$

ATTE ALEXIS SÁEZ URIBE.

MUCHA SUERTE

?