Clase Auxiliar #2

Prof: Patricio Martens
P. Aux: Alexis Sáez U.

Repaso

Ley cero: Si A está en equilibrio termodinámico con B, y B en equilibrio termodinámico con C $\Rightarrow$ A está en eq. termodinámico con C.

1ra ley de la termodinámica:

- $\Delta U = -W_{ad}$ (caso adiabático) (nunca se usa!). W_{ad}: trabajo adiabático
- $\Delta U = Q - W$ (siempre se usa). Q: calor, W: trabajo total.

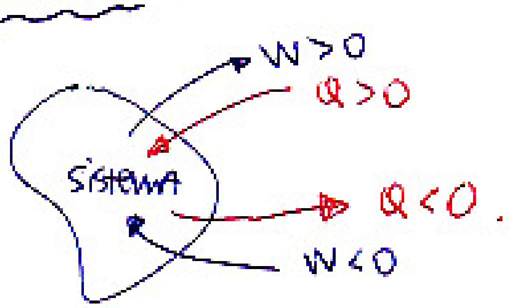
Proceso cuasiestático: Es un proceso en el que todos los estados intermedios son de equilibrio.

1ra ley (forma diferencial):

$$dU = \delta Q - \delta W \xrightarrow{\text{en un proceso cuasiestático se puede integrar}} U(B) - U(A) = Q_{AB} - W_{AB}.$$

(Para procesos cuasi-estáticos $\delta = d$).

Convención:



Coeficiente de dilatación cúbico.

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_p$$

Coeficiente de compresibilidad.

$$K = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_\theta .$$

$$dW = p \cdot dV \longrightarrow W_{AB} = \int_A^B p \cdot dV \quad \text{(proceso cuasiestático)}.$$

CAPACIDAD CALÓRICA.

$$C = \frac{dQ}{d\theta} \quad \text{(DERIVADA TOTAL).}$$

$$C_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_V \xrightarrow[\text{de la 1ra ley.}]{} C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_V$$

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_P \xrightarrow[\text{de la 1ra ley.}]{} C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_P + P\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P$$

P1 PARA CIERTA SUBSTANCIA SE SABE QUE $V\cdot\beta = a$ SOLO CUANDO $P = 1$ Y PARA TODO θ. ADEMÁS SE SABE QUE $V\cdot K = \frac{a\theta}{P^2} - \frac{2b}{P^3}$ PARA TODO θ Y P.

SI CUANDO $P \to +\infty \Rightarrow V \to V_0$. ENCONTRAR LA ECUACIÓN DE ESTADO DE LA SUBSTANCIA. (a y b SON CTES).

Solución:

SABEMOS QUE $K = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_\theta \Rightarrow V\cdot K = -\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_\theta$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_\theta = \frac{2b}{P^3} - \frac{a\theta}{P^2}, \quad \text{si dejamos } \theta = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \int dV = \int\left(\frac{2b}{P^3} - \frac{a\theta}{P^2}\right)dP \Rightarrow V = \frac{2b}{-2\cdot P^2} + \frac{a\theta}{P} + f(\theta)$$

$$\Rightarrow V = \frac{a\theta}{P} - \frac{b}{P^2} + f(\theta) \quad (1).$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P = \frac{a}{P} + f'(\theta), \quad \text{como } \beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P$$

$$\Rightarrow V\cdot\beta = \frac{a}{P} + f'(\theta), \quad \text{para todo } \theta \text{ y } P = 1 \quad V\beta = a$$

$$\Rightarrow a = \frac{a}{1} + f'(\theta) \Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = K \text{ (CTE).}$$

Reemplazando en ① $\Rightarrow \quad V = \frac{a\theta}{p} - \frac{b}{p^2} + K$.

Como $p \to +\infty \Rightarrow V \to V_0$ se tiene que:

$$V_0 = K$$

$$\therefore \quad V = \frac{a\theta}{p} - \frac{b}{p^2} + V_0 \qquad \text{(EC. DE ESTADO)} //.$$

$\boxed{P_2}$ DEMOSTRAR QUE $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$.

Solución./ CONSIDEREMOS $z(x,y)$

$$\Rightarrow \quad dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \quad ①$$

CONSIDEREMOS AHORA $x(y,z)$

$$\Rightarrow \quad dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \cdot dz \quad ②.$$

② en ① $\Rightarrow$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz\right] + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

$$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\right] dz = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] dy$$

$$\underbrace{\qquad = 0 \qquad\qquad\qquad = 0 \qquad}_{\text{pues } dz \text{ y } dy \text{ son l.i.}}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1$$

Observación: Igualando a cero el lado derecho de esta última ecuación se tiene que:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1 \quad //.$$

P3

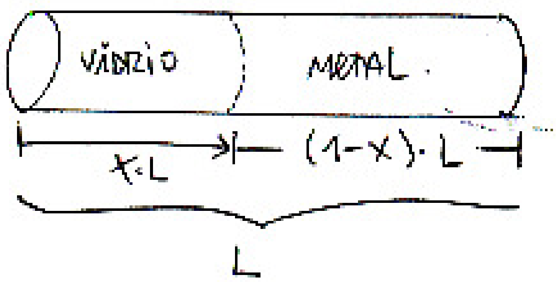
Se tiene un tubo cilíndrico compuesto por dos materiales (vidrio y un metal desconocido). Inicialmente el tubo se encuentra a una temperatura de 300°K. Al aumentar la temperatura hasta 500°K se observa que el tubo se dilata alargándose la mitad de su largo inicial. Sabiendo que los coeficientes de dilatación cúbico son:

$$\beta_V = 0{,}0035 \left[1/{}^\circ K\right] \quad y \quad \beta_M = 5 \cdot 10^{-5} \left[1/{}^\circ K\right]$$

, del vidrio y el metal respectivamente.

Encontrar el largo inicial que debe tener cada material para que ocurra lo antes descrito.

Solución



Supongamos una sección transversal A luego:

$$V_i = LA \quad , \quad V_f = \frac{3}{2} LA$$

Además tenemos que:

$$\theta_i = 300°K \quad , \quad \theta_f = 500°K$$

Ocupemos ahora la fórmula del coeficiente de dilatación cúbico.

$$\beta = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P \Rightarrow \int_{\theta_i}^{\theta_f} \beta \, d\theta = \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \Rightarrow \beta(\theta_f - \theta_i) = \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V_f = V_i \, e^{\beta(\theta_f - \theta_i)} \quad //.$$

ESTO ES PARA CADA MATERIAL POR SEPARADO PUES TIENEN DIFERENTES β'S //.

AHORA ...

$$\frac{3}{2} LA = V_{f \cdot \text{vidrio}} + V_{f \cdot \text{metal}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} LA = V_{i \cdot \text{vidrio}} \cdot e^{\beta_V \cdot 200} + V_{i \cdot \text{metal}} \cdot e^{\beta_M \cdot 200}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} \cancel{LA} = x \cdot \cancel{LA} \cdot e^{\beta_V \cdot 200} + (1-x) \cancel{LA} \, e^{\beta_M \cdot 200}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} - e^{200 \cdot \beta_M} = x \left(e^{200 \beta_V} - e^{200 \beta_M} \right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{3 - 2 \cdot e^{200 \beta_M}}{2 \left(e^{200 \beta_V} - e^{200 \beta_M} \right)}$$

FINALMENTE CON LOS VALORES DE β_V Y β_M SE TIENE QUE:

$$x = \frac{3 - 2 e^{0{,}01}}{2 \left(e^{0{,}7} - e^{0{,}01} \right)} \approx 0{,}49 \; //.$$

$\boxed{P_4}$ GAS IDEAL.

EC. DE ESTADO. $\longrightarrow \; pV = nR\theta$

PROC. CUASIESTÁTICOS. $\longrightarrow \; dU = n C_V d\theta$

(SALE DE LA 1era LEY) $dQ = n C_V d\theta + p dV.$

GASES MONOATÓMICOS. $\longrightarrow \; C_V = \frac{3}{2} R \;, \; C_p = \frac{5}{2} R$

GASES BIATÓMICOS. $\longrightarrow \; C_V = \frac{5}{2} R \;, \; C_p = \frac{7}{2} R.$

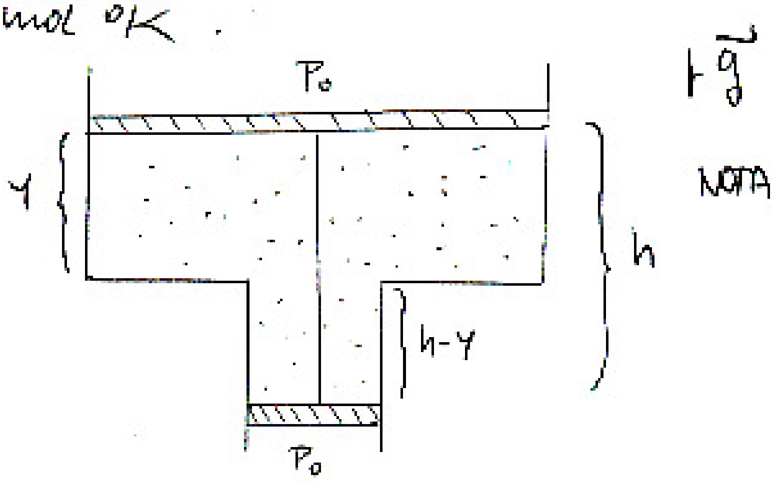
PROC. CUASIESTÁTICOS ADIABÁTICOS. $\longrightarrow \; pV^{\gamma} = \text{CTE}.$

$$; \; \gamma = \frac{C_p}{C_V} > 1 \; //.$$

P4 (P1 EXAMEN OTOÑO 1999).

EN UN TUBO VERTICAL COMPUESTO DE DOS SECCIONES DIFERENTES Y ABIERTOS POR AMBOS EXTREMOS PUEDEN DESLIZAR SIN ROCE DOS ÉMBOLOS, UNO EN CADA SECCIÓN, UNIDOS MEDIANTE UN HILO INEXTENSIBLE. EL ESPACIO ENTRE AMBOS ÉMBOLOS SE ENCUENTRA LLENO DE 1 MOL DE GAS IDEAL. LA SUPERFICIE DEL ÉMBOLO SUPERIOR ES $10\ cm^2$ MAYOR QUE LA INFERIOR. LA MASA TOTAL DE LOS ÉMBOLOS ES $m = 5\ kg$. LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA ES $P_0 = 1\ atm$. ¿CUÁNTO DEBE CALENTARSE EL GAS CONTENIDO ENTRE LOS ÉMBOLOS PARA QUE ESTOS SE DESPLACEN $L = 5\ cm$?

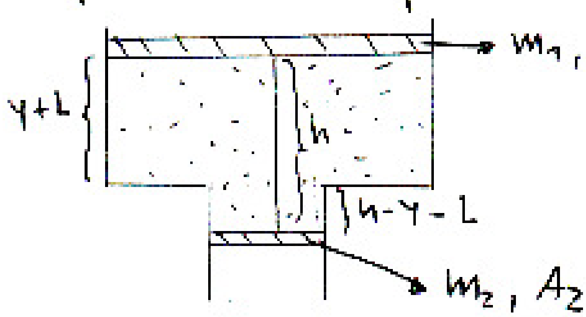
$$R = 0{,}082\ \frac{LT \cdot Atm}{mol\ ^oK}.$$



NOTA: EL PROCESO ES CUASIESTÁTICO.

Solución. / RESOLVAMOS EL PROBLEMA PARA DATOS EN GENERAL (AL FINAL REEMPLAZAMOS VALORES).

SUPONGAMOS EL DESPLAZAMIENTO $L = 5\ cm$.



Tenemos que $\Delta U = Q - W$, queremos Q

luego $Q = \Delta U + W$.

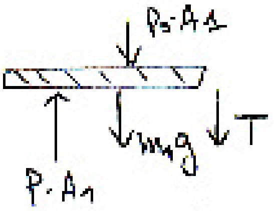
Calculemos ΔU:

Como es un gas ideal y el proc. es cuasiestático

$\Rightarrow \Delta U = n C_v \Delta\theta$, $\Delta\theta$? Tenemos que:

$PV = nR\theta$

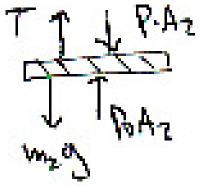
$\Rightarrow P$?, para el émbolo de arriba.



Como el proceso es cuasiestático

$\Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow P_0 A_1 + m_1 g + T = P A_1$ (1)

Para el émbolo de abajo.



$\Rightarrow P A_2 + m_2 g = P_0 A_2 + T$ (2).

(2) en (1) $\Rightarrow P_0 A_1 + m_1 g + P A_2 + m_2 g - P_0 A_2 = P A_1$

$\Rightarrow P_0 (A_1 - A_2) + (m_1 + m_2) g = P (A_1 - A_2)$

$$\Rightarrow P = P_0 + \frac{(m_1 + m_2) g}{A_1 - A_2}$$

Notemos que: $P = cte$ pues $P_0 = 1$ atm, $m_1 + m_2 = 5$ kg y $A_1 - A_2 = 10$ cm^2

$\Rightarrow P = 5{,}9$ atm.

De esta forma $PV = R\theta$ $(n=1)$ $\Rightarrow P \cdot \Delta V = R \Delta\theta$

Falta ΔV?

$V_i = yA_1 + (h-y)A_2$

$V_f = (y+L)A_1 + (h-y-L)A_2$

$\Rightarrow \Delta V = V_f - V_i = \cancel{yA_1} + LA_1 + \cancel{hA_2} - \cancel{yA_2} - LA_2 - \cancel{yA_1} - \cancel{hA_2} + \cancel{yA_2}$

$= LA_1 - LA_2 = L(A_1 - A_2) = \Delta V$

Como $L = 5\,cm$ y $A_1 - A_2 = 10\,cm^2$

$$\Rightarrow \underline{\Delta V = 50\,cm^3} \longrightarrow \underline{\Delta V = 0{,}05\ Lt.}$$

$\boxed{8/9}$

Así, $p \cdot \Delta V = R\Delta\theta \Rightarrow \underline{\Delta\theta = \frac{p\Delta V}{R}} \longrightarrow \Delta\theta =$

$$\Rightarrow \Delta U = C_v \cdot \Delta\theta \Rightarrow \Delta U = C_v \cdot \frac{p\Delta V}{R} \Rightarrow \Delta U = \frac{3}{2}\cancel{R} \cdot \frac{p \cdot \Delta V}{\cancel{R}}$$

supongámoslo monoatómico.

$$\Rightarrow \underline{\Delta U = \frac{3}{2} p \cdot \Delta V}$$

Como $Q = \Delta U + W$, falta W,

Como $p = cte \Rightarrow \underline{W = p \cdot \Delta V}$

cuasiestático

$$\Rightarrow Q = \frac{3}{2} p\Delta V + p\Delta V$$

$$\Rightarrow \underline{Q = \frac{5}{2} p \cdot \Delta V}$$

$\boxed{P5}$ Demuestre que el calor transferido durante un proceso cuasiestático infinitesimal de un gas ideal se puede calcular como:

$$\delta Q = C_v \frac{V dp}{R} + C_p \frac{p dV}{R}.$$

Solución. Por las características del proceso tenemos que:

$$dU = \delta Q - \delta W \quad ①$$

$$② \; dU = nC_v d\theta \;, \quad PV = nR\theta \; ③.$$

① $\Rightarrow$ $\delta Q = dU + \delta W$, como el proc. es cuasiestático $\Rightarrow$ $\delta W = PdV$ //.

Falta dU. $dU = nC_v d\theta$.

Consideremos $\theta(P,V)$

$$\Rightarrow \quad d\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial\theta}{\partial V}\right)_p dV$$

, como (③) $\theta = \dfrac{PV}{nR} \Rightarrow \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial p}\right)_V = \dfrac{V}{nR} \wedge \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial V}\right)_p = \dfrac{P}{nR}$

$$\Rightarrow \quad d\theta = \frac{V}{nR}dp + \frac{P}{nR}dV$$

$\Rightarrow$ en ② $\quad dU = nC_v \cdot \left(\dfrac{V}{nR}dp + \dfrac{P}{nR}dV\right)$

$$\Rightarrow dU = \frac{C_v V dp}{R} + \frac{C_v P dV}{R}$$

Reemplazando en ①. $\delta Q = \dfrac{C_v V dp}{R} + \dfrac{C_v P dV}{R} + PdV.$

$\Rightarrow \delta Q = \dfrac{C_v V dp}{R} + \left(\dfrac{C_v}{R} + 1\right)PdV$, pero. $\dfrac{C_v}{R} + 1 = \dfrac{C_v + R}{R}$

$= \dfrac{C_p}{R}$ (para gas ideal) monoatómico o biatómico.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta Q = \frac{C_v V dp}{R} + \frac{C_p P dV}{R}}$$

Atte

Alexis

9/9