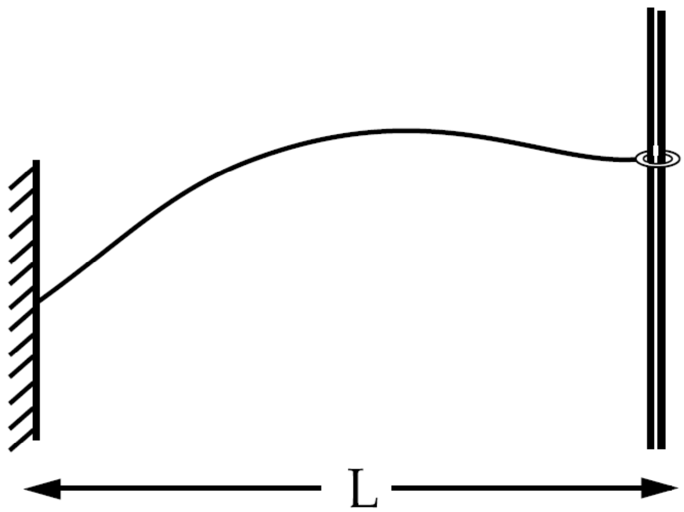
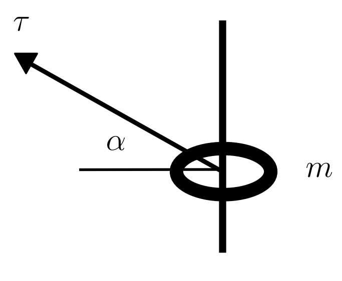
Condiciones de borde

1. Una cuerda uniforme de largo L y tensión τ, tiene un extremo fijo en $x = 0$, y el otro extremo se encuentra unido a un anillo de masa m que puede moverse libremente por una barra vertical. Encuentre las condiciones de borde para $x = L$



Solución:

Hacemos sumatoria de fuerzas en $x = L$



Tenemos:

$$\tau \sin\alpha = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$
$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

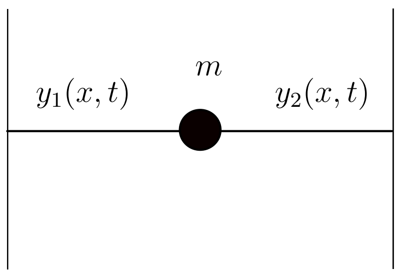
$$\Rightarrow \tau\frac{\partial y(L,t)}{\partial x} = m\frac{\partial^2 y(L,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

2. Una cuerda de largo L cuyos extremos están fijos, tiene una masa m en el medio. La cuerda está sometida a una tensión τ.

   a) Encuentre las condiciones de borde que se deben satisfacer en $x = L$.

   b) Encuentre una ecuación que permita calcular los modos normales.

   c) Encuentre la función de onda.



Solución:

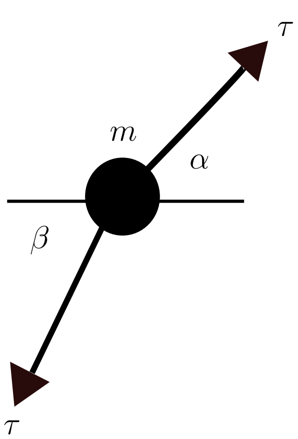
Debemos considerar dos funciones de onda:
$y_1(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)\cos wt$ para $-\frac{L}{2} \leq x \leq 0$
$y_2(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)\cos wt$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$

Condiciones de borde:

- Continuidad

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \tag{2}$$

- Hacemos sumatoria de fuerzas



$$\tau \sin\alpha - \tau \sin\beta = m\frac{\partial^2 y_1(0,t)}{\partial t^2} = m\frac{\partial^2 y_2(0,t)}{\partial t^2}$$

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\tau\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} - \tau\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} = m\frac{\partial^2 y_1(0,t)}{\partial t^2} \tag{3}$$

Tenemos las condiciones de bordes fijos en los extremos

$y_1(\frac{-L}{2},t) = 0 \Rightarrow A\cos(-k\frac{L}{2}) + B\sin(-k\frac{L}{2}) = 0$

$$\Rightarrow A = B\tan(k\frac{L}{2}) \tag{4}$$

$y_2(\frac{L}{2},t) = 0 \Rightarrow C\cos(k\frac{L}{2}) + D\sin(k\frac{L}{2}) = 0$

$$\Rightarrow C = -D\tan(k\frac{L}{2}) \tag{5}$$

$(4) \Rightarrow y_1(x,t) = B[\tan(k\frac{L}{2})\cos(kx) + \sin(kx)]\cos(wt)$

$y_1(x,t) = \frac{B}{\cos(k\frac{L}{2})}[\sin(k\frac{L}{2})\cos(kx) + \sin(kx)\cos(k\frac{L}{2})]\cos(wt)$

$\Rightarrow y_1(x,t) = \frac{B}{\cos(k\frac{L}{2})}[\sin(k\frac{L}{2} + kx)]\cos(wt)$

$(5) \Rightarrow y_2(x,t) = D[-\tan(k\frac{L}{2})\cos(kx) + \sin(kx)]\cos(wt)$

$y_2(x,t) = \frac{D}{\cos(k\frac{L}{2})}[\sin(kx)\cos(k\frac{L}{2}) - \sin(k\frac{L}{2})\cos(kx)]\cos(wt)$

$\Rightarrow y_2(x,t) = \frac{D}{\cos(k\frac{L}{2})}[\sin(kx - k\frac{L}{2})]\cos(wt)$

$(3) \Rightarrow -\frac{B\tau k}{\cos(k\frac{L}{2})}\cos(k\frac{L}{2})\cos(wt) + \frac{D\tau k}{\cos(k\frac{L}{2})}\cos(-k\frac{L}{2})\cos(wt) = -\frac{Bmw^2}{\cos(k\frac{L}{2})}\sin(k\frac{L}{2})\cos(wt)$

$\Rightarrow -\tau Bk\cos(wt) + \tau Dk\cos(wt) = -mBw^2\tan(k\frac{L}{2})\cos(wt)$

$\tau(D-B)k = -mBw^2\tan(k\frac{L}{2})$

Pero (2) $\Rightarrow A = C$, luego de (4) y(5) $\Rightarrow B = -D$

$\Rightarrow 2\tau Bk = mBw^2 \tan(k\frac{L}{2})$

$$w^2 = \frac{2\tau k}{m\tan(k\frac{L}{2})} \tag{6}$$

3. Finalmente las funciones de onda quedan:

$y_1(x,t) = \frac{B}{\cos(k\frac{L}{2})}\sin(kx + k\frac{L}{2})\cos(wt)$ para $\frac{-L}{2} \leq x \leq 0$

$y_2(x,t) = -\frac{B}{\cos(k\frac{L}{2})}\sin(kx - k\frac{L}{2})\cos(wt)$ para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$