Ondas en dos dimensiones → Membranas

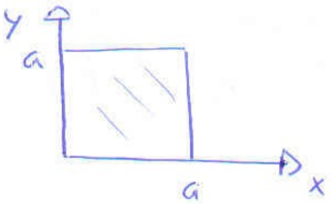
La ecuación que se satisface es

$$(\star)\ \nabla^2\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}} \rightarrow \text{densidad superficial}$$

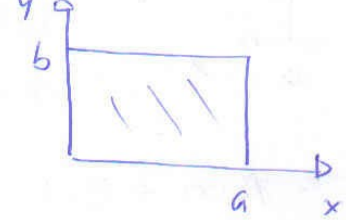
También existen soluciones conocidas de la forma

$$\psi = F(x-ct)$$
$$\psi = F(y-ct)$$

Membrana cuadrada



Membrana rectangular



En general, se debe hacer separación de variables en x, y y t (igual que en cuerdas)

$$\rightarrow \quad \psi(x,y,t) = X(x)Y(y)e^{-i\omega t}$$

En la ecuación $(\star)$

$$X''Y\cancel{e^{-i\omega t}} + XY''\cancel{e^{-i\omega t}} = \frac{1}{c^2}(-\omega^2)XY\cancel{e^{-i\omega t}} \quad / \cdot \frac{1}{XY}$$

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-k_y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \equiv -k^2$$

$$\Rightarrow \boxed{k_x^2 + k_y^2 = k^2}$$

Tenemos dos ecuaciones

$$X'' + k_x^2 X = 0$$
$$Y'' + k_y^2 Y = 0$$

$(\star)$ Notar que definimos $\frac{X''}{X} = -k_x^2$ con signo $(-)$

Esto es para obtener soluciones oscilatorias, si ponen signo $(+)$ obtienen exponenciales reales que explotan.

Luego, las soluciones son

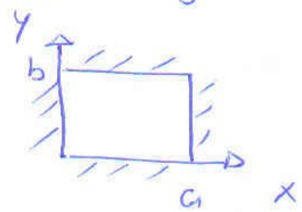
$$\begin{cases} X(x) = A\,\mathrm{sen}(k_x x) + B\cos(k_x x) \\ Y(y) = C\,\mathrm{sen}(k_y y) + D\cos(k_y y) \end{cases}$$

Condiciones de borde

Consideremos una membrana rectangular de lados a, b

Casos:

I Bordes Fijos



$$\psi(x=0, y, t) = 0 \quad (1)$$
$$\psi(x=a, y, t) = 0 \quad (2)$$
$$\psi(x, y=0, t) = 0 \quad (3)$$
$$\psi(x, y=b, t) = 0 \quad (4)$$

(1) $\Rightarrow$ $A\cdot 0 + B\cdot 1 = 0$

$$\boxed{B = 0}$$

(2) $\Rightarrow$ $\mathrm{sen}(k_x a) = 0$

$$\mathrm{sen}(k_x a) = 0$$

$$a k_x = n\pi \qquad \boxed{k_x = \frac{n\pi}{a}}$$

(3) $\Rightarrow$ $C\cdot 0 + D\cdot 1 = 0$

$$\boxed{D = 0}$$

(4) $\mathrm{sen}(k_y b) = 0 \qquad \boxed{k_y = \frac{m\pi}{b}}$

modos:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\boxed{k^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}$$

Luego la solución

$$\psi(x,y,t) = X(x)Y(y)e^{-i\omega t}$$

$$\psi_{mn}(x,y,t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) B_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{-i\omega t}$$

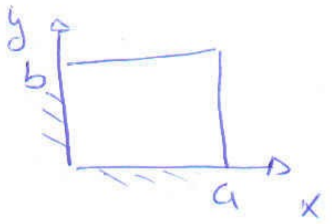
y la solución general es la combinación lineal de todos los modos

$$\psi(x,y,t) = \sum \tilde{A}_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) e^{-i\omega t}$$

donde $n, m = 1, 2, 3 \ldots$

($n=0$, $m=0$ no se incluye porque anula la solución y no queremos soluciones triviales)

(II) 2 bordes fijos y 2 bordes libres



$$\psi(x=0, y, t) = 0 \quad ①$$

$$\psi(x, y=0, t) = 0 \quad ②$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x=a, y, t) = 0 \quad ③$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, y=b, t) = 0 \quad ④$$

(*) La demostración de 3 y 4 quedan propuestas pero es análogo al caso de la cuerda (usar $\sum F$ en los bordes)

① $\Rightarrow$ $\boxed{B = 0}$

② $\Rightarrow$ $\boxed{D = 0}$

$\Rightarrow$ $X(x) = A \operatorname{sen}(k_x x)$

$Y(y) = C \operatorname{sen}(k_y y)$

③ $\Rightarrow$ $k_x A \cos(k_x a) = 0$

$$\boxed{k_x = (2n+1)\frac{\pi}{2a}}$$

($\cos x$ se anula en múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$)

(4) $k_y B \cos(k_y B) = 0$

$$\boxed{k_y = (2m+1)\frac{\pi}{2b}}$$

$$\boxed{K^2 = \pi^2\left(\frac{(2m+1)^2}{b^2} + \frac{(2n+1)^2}{a^2}\right)}$$

Las frecuencias en ambos casos serían

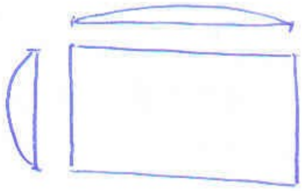
$$\omega_{mn} = K_{mn} c$$

(I) $\Rightarrow$ $\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$ $\quad n, m = 1, 2,$

El modo fundamental es : (ω más baj

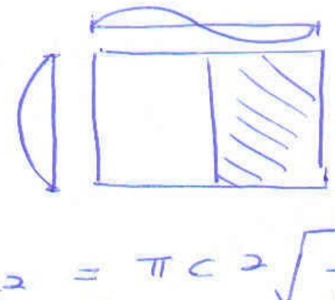
$n = 1, \; m = 1$

$$\omega_{11} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$



Luego los modos son

$$\omega_{21} = \pi c \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2}} =$$



$$\omega_{22} = \pi c \, 2 \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$