b) Considere que en $t=0$ se genera una variación de presión centrada en la mitad del tubo cuya forma es $P_e = P_0 e^{-\alpha x^2}$ en $[-L/4, L/4]$ y es nula fuera de este. Encuentre la expresión que describe a esta perturbación después de transcurrido un tiempo $\Delta t = \frac{3L}{2c}$

Re

a) $$S(x,t) = \sum_n A_n \operatorname{Sen}(k_n x) \cdot \operatorname{Cos}(\omega_n t)$$

$$P_e = c^2 \rho_e = -c^2 \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{t=0} = P_0 e^{-\alpha x^2}$$

$$-c^2 \rho_0 \sum_n A_n k_n \operatorname{Cos}(k_n x) = P_0 e^{-\alpha x^2} \quad / \int_0^L \operatorname{Cos}(k_m x)\, dx$$

por ortogonalidad

$$\Rightarrow \; -c^2 \rho_0 \, k_n A_n \int_{L/4}^{3L/4} \operatorname{Cos}(k_n x) \cdot \operatorname{Cos}(k_m x)\, dx = \int_{L/4}^{3L/4} P_0 e^{-\alpha x^2} \cos(k_m x)\, dx$$

$$\Rightarrow \; -c^2 \rho_0 \, k_m A_n \cdot \frac{L}{2} = \int_{L/4}^{3L/4} P_0 e^{-\alpha x^2} \cos(k_m x)\, dx$$

$$\Rightarrow \; A_m = -\frac{P_0 \, 2}{c^2 \rho_0 L k_m} \int_{L/4}^{3L/4} e^{-\alpha x^2} \operatorname{Cos}(k_m x)\, dx$$