Sistemas Dinámicos

Control 2

Felipe Barra y René Rojas
Tiempo: 3 horas

Problema 1: Péndulo Rodante

Un semicírculo plano de radio R y masa m oscila sin resbalar sobre una superficie horizontal, como muestra la figura 1. Encuentre la ecuación de movimiento y el período para pequeñas oscilaciones. Para eso:

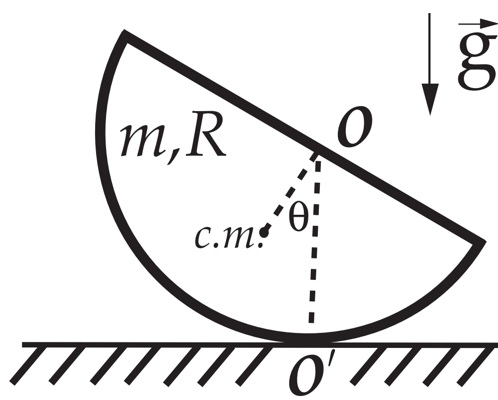

Figure 1: problema 1

a) Calcule el centro de masa del semicírculo.
b) Calcule el momento de inercia con respecto al eje perpendicular al plano y que pasa por el punto O. Obtenga el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa. Con este resultado, obtenga el momento de inercia que pasa por el centro instantáneo de rotación (punto O'). [1]
c) Escriba la energía cinética [2], la potencial y el Lagrangiano del semicírculo.
d) Escriba la ecuación de movimiento y dé el período para pequeñas oscilaciones, es decir, considere valores pequeños de la variable dinámica y elimine todos los términos no lineales.

[1] Teorema de Steiner: $I_p = I_{cm} + mr^2$, r distancia entre el centro de masa y el punto p.
[2] En el centro instantáneo de rotación la velocidad es cero.

Problema 2 : Ecuaciones de Euler

Usando las ecuaciones de Euler, resuelva el problema de un trompo simétrico con su punta fija y sin fuerza de gravedad (figura 2). Es decir, obtenga la velocidad angular en función del tiempo.

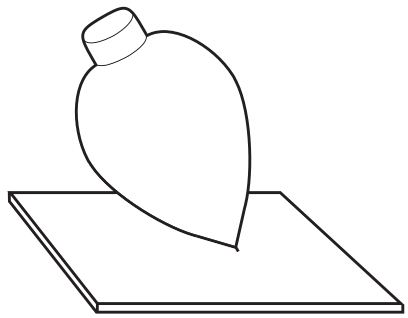

Figure 2: problema 2

Problema 3 : El trompo durmiente

Un trompo durmiente es un trompo que está perfectamente vertical (figura 3). Encuentre la condición para que el trompo durmiente sea estable y el período de oscilación si se le aplica una pequeña perturbación[3]. Para esto, deduzca el potencial efectivo, expándalo en torno a $\theta = 0$ [4] y estúdielo.

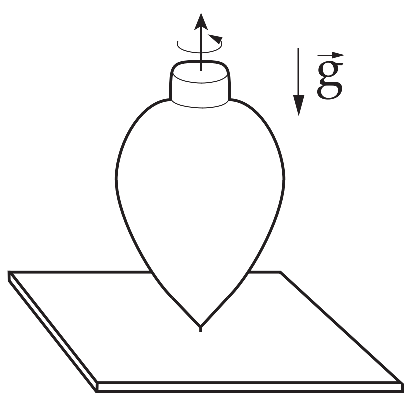

Figure 3: problema 3

[3]La energía cinética en términos de los ángulos de Euler es:

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

[4]Primero evalúe las cantidades conservadas para $\theta = 0$.