Sistemas Dinámicos

Control 1

Profs: Felipe Barra y René Rojas
Tiempo: 3 horas

Problema 1: Mecánica de Lagrange

Un bloque de masa m desliza sobre un plano inclinado de superficie completamente lisa, de masa despreciable y unido a un resorte de contante elástica k y largo natural l_0. Los puntos de unión del resorte al plano inclinado y a la superficie horizontal están a una distancia l del punto de contacto entre el plano inclinado y el suelo.

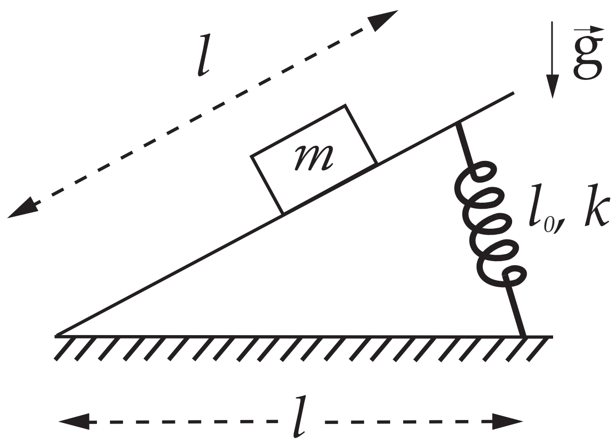

Figure 1: problema 1

a) Elija los grados de libertad apropiados y construya el Lagrangiano $L = T - V$.
b) Obtenga las ecuaciones de movimiento (Ecs. de Euler-Lagrange).
c) Construya el Hamiltoniano y escriba las ecuaciones de Hamilton.
d) ¿Cuáles son las cantidades conservadas? Justifique.

Problema 2 : Propiedades del Lagrangiano

a) Si L es un Lagrangiano para un sistema de n grados de libertad satisfaciendo las ecuaciones de Lagrange, demuestre por sustitución directa que

$$L' = L + \frac{dF(q_1, ..., q_n, t)}{dt} \tag{1}$$

también satisface las ecuaciones de Lagrange, donde F es cualquier función arbitraria, pero diferenciable, de sus argumentos.

b) Sean $q_1, ..., q_n$ un conjunto de coordenadas generalizadas independientes para un sistema de n grados de libertad con un Lagrangiano $L(q, \dot{q}, t)$. Suponga que transformamos a otro conjunto de coordenadas independientes $s_1, ..., s_n$ por medio de ecuaciones de transformación

$$q_i = q_i(s_1, ..., s_n, t) \qquad i = 1, ..., n \tag{2}$$

Demuestre que si el Lagrangiano se expresa como función de los s_j, $\dot{s}_j$ y t a través de las ecuaciones de transformación, entonces el nuevo lagrangiano $L'(s, \dot{s}, t) = L(q(s,t), \dot{q}(s, \dot{s}, t), t)$ también satisface las ecuaciones de Lagrange con respecto a las coordenadas s

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial L'}{\partial s_j} = 0 \tag{3}$$

En otras palabras, la forma de las ecuaciones de Lagrange es invariante bajo transformaciones puntuales.

Problema 3 : Multiplicadores de Lagrange

Un bloque de masa m, que desliza sin roce sobre una superficie horizontal, está unido a un péndulo de largo l y masa m. Usando los multiplicadores de Lagrange encuentre la tensión de la cuerda, para ello:

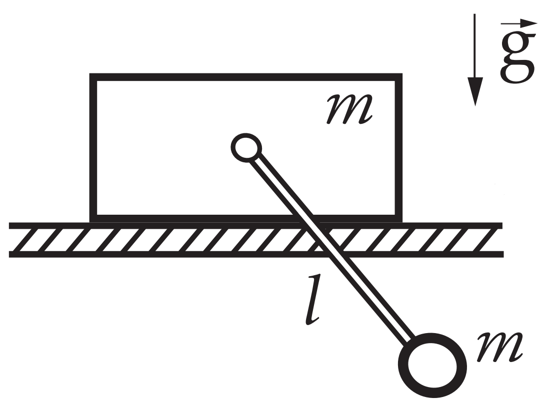

Figure 2: problema 3

a) Escriba el Lagrangiano, no olvide incuir el multiplicador de Lagrange.
b) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.
c) Encuentre todas las cantidades conservadas.
d) Finalmente, encuentre la tensión como función sólo del angulo del péndulo. Por simplicidad, suponga que todas las cantidades conservadas valen cero.