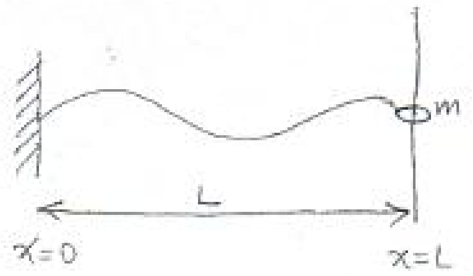
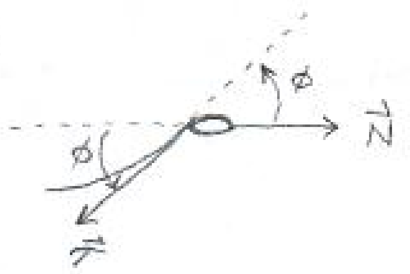
PAUTA P1 C3



(a) Condición de Borde en $x = L$

DCL m



2ª ley de Newton en el eje vertical:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x=L,t) = -T \operatorname{sen}\phi \qquad \forall t$$

Pero como ya es usual: $\phi \ll 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\phi \approx tg\phi = \frac{\partial u}{\partial x}(x=L,t)$

Luego, la condición de borde en $x=L$ es:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(L,t) = -T \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) \qquad \forall t \qquad (1) \qquad 2{,}0$$

(b) Las soluciones que buscamos son del tipo:

$$u(x,t) = \left[A\cos(Kx) + B \operatorname{sen}(Kx) \right] \cos(\omega t + \phi) \qquad ; \qquad K = \frac{\omega}{c}$$

Tenemos la C.B. dada por (1) más la de extremo fijo en $x=0$:

$$u(x=0,t) = 0 \qquad \forall t \qquad (2)$$

De (2):

$$0 = u(x=0,t) = \left[A\cos(\cancelto{1}{K\cdot 0}) + B\operatorname{sen}(\cancelto{0}{K\cdot 0})\right]\cos(\omega t+\phi) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = B \operatorname{sen}(Kx)\cos(\omega t+\phi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = BK\cos(Kx)\cos(\omega t+\phi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -B\omega^2 \operatorname{sen}(Kx)\cos(\omega t+\phi)$$

Sustituyendo estas 2 ecuaciones en (1) evaluadas en $x=L$ y cancelando los $\cos(\omega t+\phi)$ (pues (1) es válida $\forall t$) obtenemos:

$$-mB\omega^2 \operatorname{sen}(KL) = -TBK\cos(KL) \qquad \wedge \quad B \neq 0 \quad (\text{si } B=0 \Rightarrow u(x,t) \equiv 0)$$

$$tg(KL) = \frac{TK}{m\omega^2} \qquad \wedge \quad K = \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow tg\left(\omega \frac{L}{c}\right) = \frac{T}{mc\omega} \qquad (3) \qquad 2{,}0$$

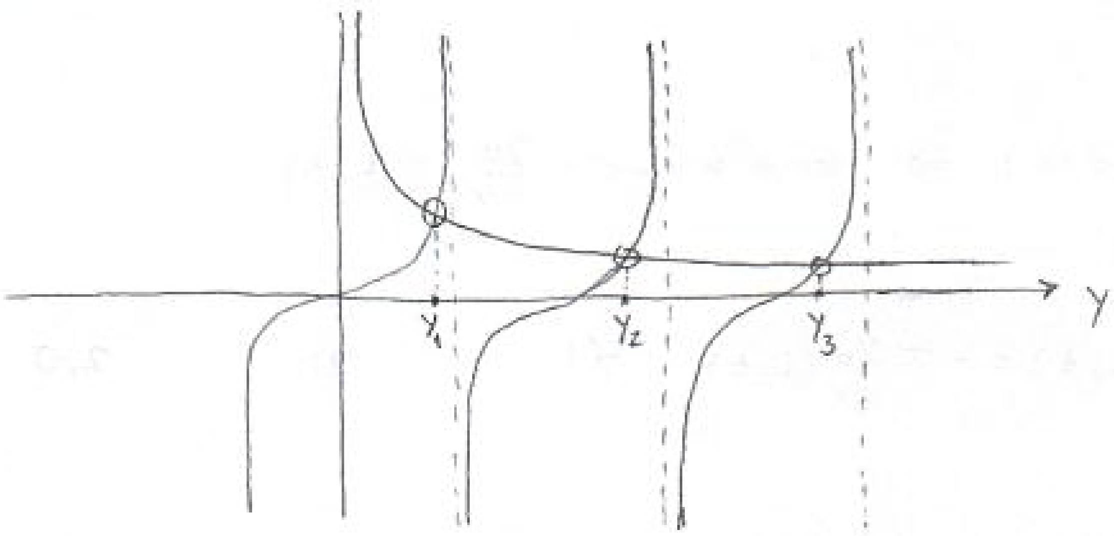
(c) Sea $y \equiv \omega \frac{L}{c}$, de (3):

$$tg\left(\omega \frac{L}{c}\right) = \frac{\tau}{mc\omega} \cdot \frac{\frac{L}{c}}{\frac{L}{c}}$$

$$tg\left(\omega \frac{L}{c}\right) = \frac{\tau L}{mc^2} \cdot \frac{1}{\omega \frac{L}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad tg(y) = \frac{\tau L}{mc^2} \cdot \frac{1}{y} \qquad (4)$$

Buscamos los "y" que sean solución de (4), para ello graficamos ambas funciones $tg(y)$ y $\frac{\tau L}{mc^2}\frac{1}{y}$ y vemos sus intersecciones.



1,0

Nos damos cuenta que existen infinito numerables soluciones de (4); las llamaremos y_n, $n \in \mathbb{N}$. Del dibujo observamos que y_1 e y_2 son las 2 primeras soluciones, por ende:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = \omega_1 \frac{L}{c} & \Rightarrow \omega_1 = y_1 \frac{c}{L} \\ y_2 = \omega_2 \frac{L}{c} & \Rightarrow \omega_2 = y_2 \frac{c}{L} \end{array}\right\} \text{son las frecuencias de los 2 primeros modos normales}$$

Ahora analicemos (3) para los casos límites $m \to 0$ y $m \to \infty$:

$\underline{m \to 0|}$ Corresponde al caso de un extremo libre en el que el extremo no tiene masa.

$$m \to 0 \Rightarrow tg(KL) = \infty \Rightarrow KL = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow K_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$$

se rescatan los valores K_n permitidos del caso mencionado

0,5

$\underline{m \to \infty|}$ Corresponde a un anillo de masa infinita que entonces no podría moverse. Este caso es equivalente a que en $x = L$ haya un extremo fijo.

$$m \to \infty \Rightarrow tg(KL) = 0 \Rightarrow KL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow K_n = \frac{n\pi}{L}$$

y rescatamos el conocido resultado para la cuerda de extremos fijos.

0,5

PAUTA P2 C3

(a) La ecuación de ondas, en presencia del forzamiento $f(x,t)$, se modifica:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} f(x,t) \qquad (1)$$

Con ayuda de la AYUDA, la solución buscada es:

$$u(x,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

Lo único que nos falta por determinar es A.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\omega^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

$$f(x,t) = f_0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

Sustituyendo en (1):

$$-\frac{\omega^2}{c^2} A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) = -A\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) + \frac{f_0}{\tau}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$

$$\left\{A\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right] - \frac{f_0}{\tau}\right\}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) = 0 \qquad \forall x \in [0,L],\ \forall t$$

$$\Rightarrow \quad A\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right] - \frac{f_0}{\tau} = 0$$

$$\therefore \quad A = \frac{f_0}{\tau\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \frac{f_0}{\tau\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right]}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) \qquad 3{,}0$$

(b) Si ahora $f(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ y $f(x)$ se anula en $x=0$ y $x=L$, podemos expandir $f(x)$ en serie de Fourier como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Como ahora todos los modos normales pueden ser excitados, la solución que buscamos es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t)$$, con las amplitudes A_n por determinar

(se usó la misma AYUDA de la parte (a))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

Sustituyendo en (1):

$$-\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega t) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) \quad \forall t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] - B_n \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t) = 0 \qquad \forall t$$

Ya que es $\forall t$ y $\left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto l.i. de funciones:

$$A_n = \frac{B_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

3,0