13/11/2K+7

P1 PAQUETE DE ONDAS

Un paquete de ondas es una superposición de ondas planas de todas las frecuencias, y como resultado de dicha superposición uno obtiene un "cototo" o una estructura localizada que se propaga.

Nos resultará de utilidad estudiar la siguiente integral:

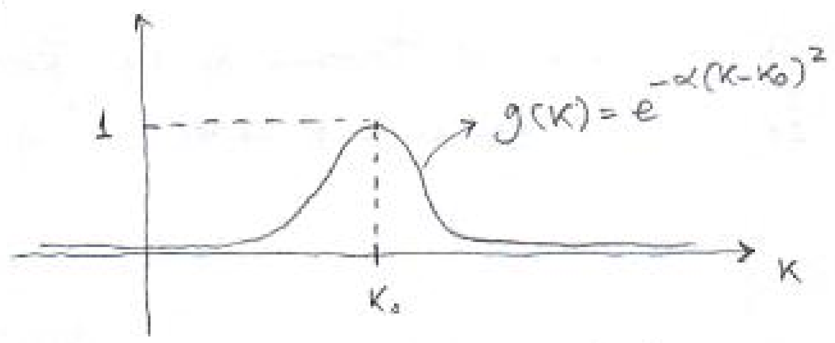
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(K)\, e^{iKx}\, dK \quad ; \quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Esta es una integral compleja cuya parte real es:

$$\mathrm{Re}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(K) \cos(Kx)\, dK$$

La última ecuación muestra que $\mathrm{Re}\{f(x)\}$ es una superposición de las funciones $\cos(Kx)$ con amplitud $g(K)$ y la integral simplemente deja en evidencia que se "suma" sobre todos los posibles valores $K \in \mathbb{R}$.

Para concretar, escojamos $g(K) = e^{-\alpha(K-K_0)^2}$ que corresponde a una gaussiana (no está normalizada) centrada en $K = K_0$.



Recordando que $g(K)$ corresponde a la amplitud de $\cos(Kx)$ en la "superposición continua" que representa $\mathrm{Re}\{f(x)\}$, se ve claramente que las amplitudes son más grandes en la vecindad de $K = K_0$. De alguna manera, que quedará clara luego, estamos tratando de resaltar $K = K_0$ por sobre el resto.

Continuemos resolviendo $f(x)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(K)\, e^{iKx}\, dK$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(K-K_0)^2} e^{iKx}\, dK$$

Hacemos el cambio de variable $K' = K - K_0 \Rightarrow \begin{cases} dK' = dK \\ K \to -\infty \Rightarrow K' \to -\infty \\ K \to +\infty \Rightarrow K' \to +\infty \end{cases}$. Luego:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha K'^2} e^{i(K'+K_0)x}\, dK'$$

$$= e^{iK_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha K'^2} e^{iK'x}\, dK'$$

$$= e^{iK_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha K'^2 + iK'x}\, dK'$$

Un breve cálculo:

$$-\alpha K'^2 + iK'x = -\alpha\left[K'^2 - iK'\frac{x}{\alpha}\right] = -\alpha\left[K'^2 - iK'\frac{x}{\alpha} + \left(i\frac{x}{2\alpha}\right)^2 - \left(i\frac{x}{2\alpha}\right)^2\right]$$

$$= -\alpha\left[K'^2 - 2K' i\frac{x}{2\alpha} + \left(i\frac{x}{2\alpha}\right)^2\right] + \alpha i^2 \frac{x^2}{4\alpha^2} = -\alpha\left[K' - i\frac{x}{2\alpha}\right]^2 - \frac{x^2}{4\alpha}$$

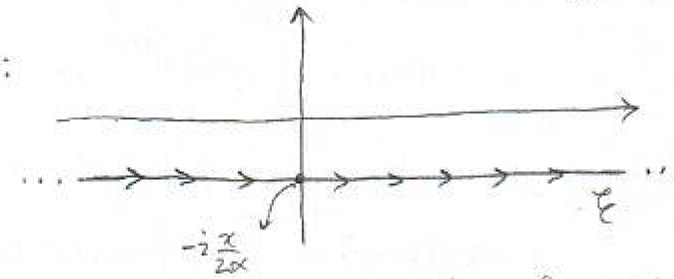
Entonces:

$$f(x) = e^{ik_0x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left[k'-i\frac{x}{2\alpha}\right]^2-\frac{x^2}{4\alpha}}\,dk'$$

$$= e^{ik_0x}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left[k'-i\frac{x}{2\alpha}\right]}\,dk'}_{I}$$

La integral I es una integral sobre el plano complejo. Haciendo el cambio de variable $z = k' - i\frac{x}{2\alpha}$:

$$I = \int_{\mathcal{C}} e^{-\alpha z^2}\,dz$$ con el camino $\mathcal{C}$ dado por:



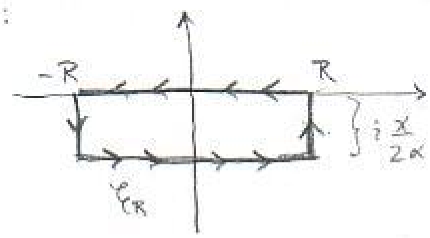
Ya que $e^{-\alpha z^2}$ es analítica en todo $\mathbb{C}$, es fácil demostrar que el camino $\mathcal{C}$ se puede deformar hasta que coincida con el eje real, así:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy \quad , \; y \in \mathbb{R}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{(integral archi-conocida)}$$

Hint: Para demostrarlo usar:

el camino $\mathcal{C}_R$



y el Teorema de los Residuos y luego tomar $R \to \infty$.

Finalmente:

$$f(x) = e^{ik_0x}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{f(x)\} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}\cos(k_0x)$$

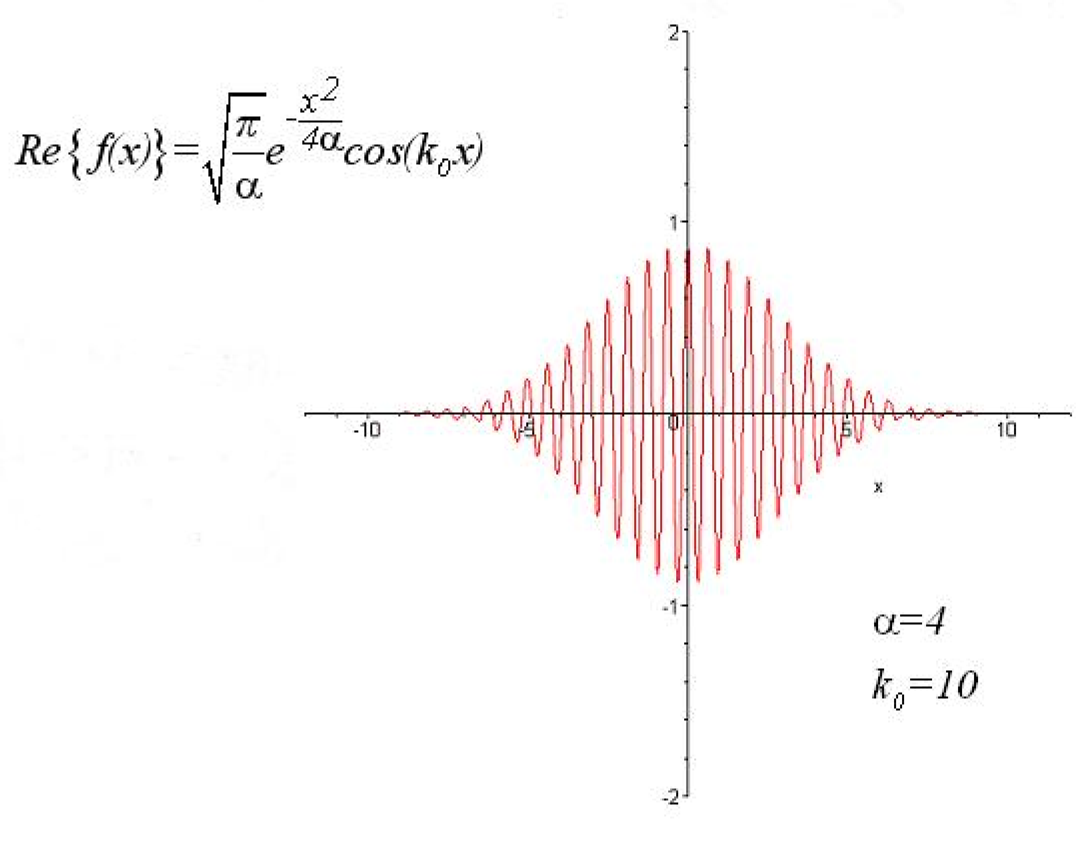
El resultado de esta superposición de las funciones $\cos(kx)$ con amplitudes $g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ centradas en $k = k_0$, es la función $\cos(k_0x)$ "modulada" por $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$.

De la 22ª edición del Diccionario de la Lengua Española (RAE):

Modular:

→ Modificar los factores que intervienen en un proceso para obtener distintos resultados; p. ej., aumentar la temperatura para acelerar una reacción.

→ (Eléctr.) Variar el valor de la amplitud, frecuencia o fase de una onda portadora en función de una señal.



Pero a nosotros nos interesa que haya evolución temporal. El verdadero paquete de ondas es:

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(K)\, e^{i(Kx - \omega(K)t)}\, dK$$

$$\mathrm{Re}\{f(x,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(K)\cos(Kx - \omega(K)t)\, dK$$

Aquí lo nuevo es que $\omega = \omega(K)$. Hasta ahora nosotros escribíamos $\omega = Kc$ y esto correspondía a ondas que no cambiaban de forma al desplazarse. Esto es muy idealizado, en realidad las ondas se van atenuando o ensanchando a medida que avanzan. A esto se le llama DISPERSIÓN. La ecuación $\omega = \omega(K)$ se llama relación de dispersión y se calcula de las C.B. en cada caso. En el caso muy simplificado de nuestra werdita, obteníamos $\omega = Kc$; esta relación no presenta dispersión, i.e., la ondas se propagaban sin cambiar su forma.

Continuemos con el caso $g(K) = e^{-\alpha(K-K_0)^2}$, como habíamos mencionado, $g(K)$ está localizada en la vecindad de $K = K_0$, luego resulta válida la siguiente aproximación:

$$\omega(K) \approx \omega(K_0) + (K-K_0)\frac{\partial\omega}{\partial K}(K_0) + \frac{1}{2}(K-K_0)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial K^2}(K_0) \qquad \left(\text{Expansión en serie de Taylor a } 2^\circ \text{ orden}\right)$$

Llamando $v_g \equiv \frac{\partial\omega}{\partial K}(K_0)$ y $\beta \equiv \frac{\partial^2\omega}{\partial K^2}(K_0)$ y reemplazando en $f(x,t)$:

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(K)\, e^{i\left[Kx - \omega(K_0)t - (K-K_0)v_g t - \frac{1}{2}(K-K_0)^2\beta t\right]} dK \quad \wedge \quad g(K) = e^{-\alpha(K-K_0)^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left[Kx - \omega(K_0)t - (K-K_0)v_g t - \frac{1}{2}(K-K_0)^2\beta t\right]}\, e^{-\alpha(K-K_0)^2}\, dK$$

Haciendo $K' = K - K_0$:

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left[(K'+K_0)x - \omega(K_0)t - K'v_g t - \frac{1}{2}K'^2\beta t\right]}\, e^{-\alpha K'^2}\, dK'$$

$$= e^{i[K_0x - \omega(K_0)t]}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\alpha + \frac{1}{2}i\beta t\right]K'^2}\, e^{iK'(x - v_g t)}\, dK'$$

Análogamente al cálculo de $f(x)$ (basta hacer los reemplazos: $\alpha \to \alpha + \frac{1}{2}i\beta t$ y $x \to x - v_g t$) obtenemos:

$$f(x,t) = e^{i[K_0x - \omega(K_0)t]}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \frac{1}{2}i\beta t}}\; e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{4(\alpha + \frac{1}{2}i\beta t)}}$$

Con algo de sudor se demuestra:

$$\mathrm{Re}\{f(x,t)\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2t^2}}\; e^{-\frac{\alpha(x - v_g t)^2}{4(\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2 t^2)}}\cos\left[K_0x - \omega(K_0)t + \frac{\frac{1}{2}\beta t(x - v_g t)^2}{4(\alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}t\right)\right]$$

Volvamos a simplificar las cosas: pongamos $\beta = 0$ que equivale a expandir $\omega(K)$ sólo hasta 1er orden. Obtenemos:

$$\mathrm{Re}\{f(x,t)\} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\; e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{4\alpha}}\cos(K_0x - \omega(K_0)t)$$

Notemos que:

$$Re\{f(x,t=0)\} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \cos(K_0 x) = Re\{f(x)\}$$

Si definimos:

$$A(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

Vemos que:

$$Re\{f(x)\} = A(x)\cos(K_0 x) = Re\{f(x,t=0)\}$$

$$Re\{f(x,t)\} = A(x - v_g t)\cos(K_0 x - \omega(K_0)t) \quad ; \quad v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial K}(K_0)$$

Es hora de analizar. Al aproximar $\omega(K)$ a primer orden para una función $g(K)$ bien localizada en torno a $K=K_0$, obtenemos un paquete de ondas descrito por $Re\{f(x,t)\}$. Éste consiste de una onda plana $\cos(K_0 x - \omega(K_0)t)$ modulada por $A(x-v_g t)$. La función $A(x-v_g t)$ cumple el rol de "achoclonar" a $\cos(K_0 x - \omega(K_0)t)$ y darle forma de una estructura localizada ("cototo") que se desplaza con velocidad $v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial K}(K_0)$ que corresponde a la VELOCIDAD DE GRUPO del paquete de ondas (ver video en U-cursos)

Este paquete de ondas todavía no presenta dispersión, pero si expandimos $\omega(K)$ hasta segundo orden (i.e. ahora $\beta \neq 0$) se observa cómo nuestro cototo se va "muriendo" a medida que avanza (ver video).