P2 | Resolver la EDP (Ecuación Diferencial Parcial)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad u = u(x,t) \qquad x \in [0,L] \ , \ t \in [0,\infty)$$

C.B. (Condiciones de Borde)

$$u(0,t) = 0 = u(L,t) \qquad \forall\, t \in [0,\infty)$$

Esta condición de borde corresponde a extremos fijos

C.I. (Condiciones Iniciales)

$$u(x,0) = 0 \qquad \forall\, x \in [0,L]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0 L\, \delta(x - \tfrac{1}{2}L) \qquad \forall\, x \in [0,L]$$

Solución: Estudiaremos con todo detalle esta EDP. Primero separaremos variables, luego impondremos la C.B., de esta manera encontraremos infinito numerables modos normales. La solución será una combinación lineal infinita de los modos; los coeficientes se despejarán con la C.I..

Separación de Variables

Postulamos que la solución $u(x,t)$ que buscamos puede escribirse como:

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas obtenemos:

$$\frac{1}{c^2} X T'' = X'' T \qquad / \frac{1}{TX}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x)$$

El miembro izquierdo de la última ecuación es función sólo de t, mientras que el miembro derecho es función sólo de x. Esta ecuación es válida $\forall\, x \in [0,L]$ y $\forall\, t \in [0,\infty)$ si estas variables van a variar de manera independiente (que es el supuesto detrás de la separación de variables), la única manera que esto ocurra es que ambos miembros sean iguales a una constante real.

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \alpha = \frac{X''}{X} \qquad , \ \alpha = \text{cte} \in \mathbb{R}$$

Obtenemos las siguientes 2 ecuaciones:

$$X'' - \alpha X = 0 \qquad (1)$$

$$T'' - \alpha c^2 T = 0 \qquad (2)$$

Como $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos 3 casos: $\alpha = 0$, $\alpha < 0$, $\alpha > 0$.

Caso $\alpha = 0$

Las ecuaciones (1) y (2) se reducen a:

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B \qquad (3)$$

$$T'' = 0 \Rightarrow T(t) = Ct + D \qquad (4)$$

Ahora entran en el juego las C.B.:

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t)$$
$$0 = u(L,t) = X(L)T(t) \qquad \forall t \in [0,\infty)$$

De la primera ecuación tenemos 2 opciones: $X(0) = 0$ v $T(t) = 0$ $\forall t \in [0,\infty)$

- Si $T(t) = 0$ $\forall t \Rightarrow u(x,t) = X(x)T(t) = X(x)\cdot 0 = 0$. No estamos interesados en la solución nula, luego debe ocurrir que $X(0) = 0$. Un análisis análogo permite concluir de la segunda ecuación que $X(L) = 0$.

En resumen, las C.B., en el contexto de separación de variables, se reducen a:

$$X(0) = 0 = X(L). \qquad (5)$$

Evaluando (3) en $x = 0$ y $x = L$:

$$X(0) = B$$
$$X(L) = AL + B$$

y junto con (5) se concluye que: $A = B = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = \overset{0}{\cancel{X(x)}}T(t) = 0$

Vemos que el caso $\alpha = 0$ junto a la C.B. nos entrega la solución nula, no nos interesa, así que descartamos este caso.

Caso $\alpha > 0$

Las ecuaciones (1) y (2) quedan:

$$X'' - \alpha X = 0$$
$$T'' - \alpha c^2 T = 0$$

Estas ecuaciones se resuelven fácilmente, pues son EDO's lineales a coeficientes constantes. La soluciones son:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x} \qquad (6)$$

$$T(t) = Ce^{\sqrt{\alpha}ct} + De^{-\sqrt{\alpha}ct} \qquad (7)$$

Imponiendo las C.B. (5) en la (6):

$$0 = X(0) = A + B \Rightarrow B = -A$$

$$\Rightarrow X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} - Ae^{-\sqrt{\alpha}x} = 2A\,\tfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\alpha}x} - e^{-\sqrt{\alpha}x}\right)$$

$$\Rightarrow X(x) = 2A\,\mathrm{senh}(\sqrt{\alpha}x)$$

Pero también $X(L) = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = 2A\,\text{senh}(\sqrt{\alpha}L) \Rightarrow A = 0 \quad \vee \quad \text{senh}(\sqrt{\alpha}L)$$

$A \neq 0$ ya que si $A = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = \cancel{X(x)}^{0}\, T(t) = 0$ y no nos interesa esta solución

Luego $\text{senh}(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}L = 0$ Pero ni L ni α son nulos $\Rightarrow$ contradicción !!

El caso $\alpha > 0$ entrega la solución nula o contradicción, como no nos interesa, lo descartamos.

Caso $\alpha < 0$

Este caso nos entregará lo que buscamos. Definamos $\alpha = -K^2$ (ya que $\alpha < 0$). Las ecuaciones (1) y (2) toman el conocido aspecto:

$$X'' + K^2 X = 0$$

$$T'' + \omega^2 T = 0 \quad , \quad \omega^2 \equiv c^2 K^2$$

De inmediato reconocemos la ecuación diferencial del Oscilador Armónico. Tanto la parte espacial como la temporal tendrán comportamiento oscilatorio. Sus soluciones:

$$X(x) = A\cos(Kx) + B\,\text{sen}(Kx)$$

$$T(t) = C\cos(\omega t) + D\,\text{sen}(\omega t)$$

Ahora imponemos en $X(x)$ las C.B. dadas por (5):

$$0 = X(0) = A \quad \Rightarrow X(x) = B\,\text{sen}(Kx)$$

$$0 = X(L) = B\,\text{sen}(KL) \Rightarrow B = 0 \quad \vee \quad \text{sen}(KL) = 0$$

Pero si $B = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = \cancel{X(x)}^{0}\, T(t) = 0$ y no nos interesa !!

Entonces no queda otra que $\text{sen}(KL) = 0 \Leftrightarrow KL = n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

Por razones que explicaré algunas líneas más abajo:

$$K = K_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{(n no puede ser ni 0 ni negativo)}$$

Además $\omega = cK$ y como ahora $K = K_n$ (K_n está indexado por los naturales):

$$\omega = \omega_n = cK_n = c\,\frac{n\pi}{L}$$

Gracias a la condición de borde, descubrimos que no cualquier K (y por ende ω) nos sirve, sólo los K_n con $n \in \mathbb{N}$ están permitidos. Así, para cada n tenemos:

$$X_n(x) = B_n\,\text{sen}(K_n x)$$

$$T_n(t) = C_n\cos(\omega_n t) + D_n\,\text{sen}(\omega_n t)$$

$$\Rightarrow u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = \left[\tilde{C}_n\cos(\omega_n t) + \tilde{D}_n\,\text{sen}(\omega_n t)\right]\text{sen}(K_n x) \quad ; \quad \tilde{C}_n \equiv B_n C_n, \quad \tilde{D}_n \equiv B_n D_n$$

Los $U_n(x,t)$ son los modos normales de oscilación de esta cuerda, las frecuencias permitidas (ω_n) provienen de imponer la C.B.. Notemos que todas los $U_n(x,t)$ cumplen las C.B.. La solución general a nuestro problema, al igual que en los modos normales de oscilación de sistemas con finito número de grados de libertad, es una combinación lineal, en este caso de la cuerda, infinita de los $U_n(x,t)$:

Sea $u(x,t)$ la solución general, esta cumple:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n U_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{C}_n \cos(\omega_n t) + \bar{D}_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \right] \operatorname{sen}(K_n x) \quad ; \quad \begin{array}{l} \bar{C}_n \equiv \Lambda_n \tilde{C}_n \\ \bar{D}_n \equiv \Lambda_n \tilde{D}_n \end{array}$$

Las constantes $\bar{C}_n$ y $\bar{D}_n$ se determinan con las C.I..

Ahora, lo prometido, nos damos cuenta que $K_n = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es la buena elección de n's porque si:

$\rightarrow n = 0 \Rightarrow K_0 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(K_0 x) = 0 \Rightarrow U_0(x,t) = B_0 \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(K_0 x)}} T_0(t) = 0$ y no contribuye a la serie que define a $u(x,t)$.

$\rightarrow n$ es entero negativo $\Rightarrow n = -\tilde{n}$, con $\tilde{n}$ entero positivo ocurre:

$$\operatorname{sen}(K_n x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\tilde{n}\pi}{L} x\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\tilde{n}\pi}{L} x\right) = -\operatorname{sen}(K_{\tilde{n}} x)$$

Como el seno es impar, al considerar n's enteros negativos simplemente el seno arroja un signo negativo que absorbemos en las constantes $\bar{C}_n$ y $\bar{D}_n$ de la serie. Otra manera de entenderlo es que $\{\operatorname{sen}(K_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto l.i. de funciones y el caso n entero negativo es l.d. al entero positivo $-n$.

¡¡Vamos por esas constantes $\bar{C}_n$ y $\bar{D}_n$!!

Nos serán de utilidad las siguientes integrales:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = \int_0^L \operatorname{sen}(K_n x) \operatorname{sen}(K_m x)\, dx = \frac{L}{2} \delta_{nm} \tag{8}$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}(K_n x)\, \delta\left(x - \tfrac{1}{2}L\right) dx = \operatorname{sen}\left(K_n \tfrac{1}{2} L\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} \frac{1}{2} L\right) = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) \tag{9}$$

— o —

Tenemos:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{C}_n \cos(\omega_n t) + \bar{D}_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \right] \operatorname{sen}(K_n x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\bar{C}_n \omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) + \bar{D}_n \omega_n \cos(\omega_n t) \right] \operatorname{sen}(K_n x)$$

Evaluamos estas últimas dos ecuaciones en $t=0$ y recordando las C.I. obtenemos:

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \operatorname{sen}(K_n x) \qquad (10)$$

$$v_0 L\, \delta(x - \tfrac{1}{2}L) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n \omega_n \operatorname{sen}(K_n x) \qquad (11)$$

Consideremos (10): Sea $m \in \mathbb{N}$,

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \operatorname{sen}(K_n x) \qquad / \int_0^L \operatorname{sen}(K_m x)(\cdot)\,dx$$

$$\int_0^L \operatorname{sen}(K_m x)\cdot 0\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \int_0^L \operatorname{sen}(K_m x)\operatorname{sen}(K_n x)\,dx$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \frac{L}{2}\delta_{mn} \qquad (\text{usando } (8))$$

$$0 = \bar{C}_m \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{C}_m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Consideremos (11): Sea $m \in \mathbb{N}$,

$$v_0 L\, \delta(x - \tfrac{1}{2}L) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n \omega_n \operatorname{sen}(K_n x) \qquad / \int_0^L \operatorname{sen}(K_m x)(\cdot)\,dx$$

$$v_0 L \int_0^L \operatorname{sen}(K_m x)\,\delta(x - \tfrac{1}{2}L)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n \omega_n \int_0^L \operatorname{sen}(K_m x)\operatorname{sen}(K_n x)\,dx$$

$$v_0 L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{D}_n \omega_n \frac{L}{2}\delta_{mn} \qquad (\text{usando } (8) \text{ y } (9))$$

$$v_0 L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) = \bar{D}_m \omega_m \frac{L}{2} \quad \wedge \quad \omega_m = c K_m = c\frac{m\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{D}_m = \frac{2 v_0 L}{c m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Ya tenemos $\bar{C}_n$ y $\bar{D}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{C}_n \cos(\omega_n t) + \bar{D}_n \operatorname{sen}(\omega_n t)\right] \operatorname{sen}(K_n x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[0 \cos(\omega_n t) + \frac{2 v_0 L}{c n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(\omega_n t)\right] \operatorname{sen}(K_n x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 v_0 L}{c n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(\omega_n t) \operatorname{sen}(K_n x)$$

Pero $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ si n es par.

Luego conviene:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 v_0 L}{c(2n)\pi} \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}\left((2n)\frac{\pi}{2}\right)}} \operatorname{sen}\left(\omega_{2n} t\right) \operatorname{sen}\left(K_{2n} x\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 v_0 L}{c(2n+1)\pi} \underset{(*)}{\overset{(-1)^n}{\cancel{\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}}} \operatorname{sen}\left(\omega_{2n+1} t\right) \operatorname{sen}\left(K_{2n+1} x\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 v_0 L (-1)^n}{c(2n+1)\pi} \operatorname{sen}\left(\omega_{2n+1} t\right) \operatorname{sen}\left(K_{2n+1} x\right)$$

Lo que se hizo fue simplemente separar la serie en la serie de los pares y la de los impares.

Finalmente, recordando que

$$K_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega_n = c\,\frac{n\pi}{L}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{v_0}{c}\right)\left(\frac{L}{\pi}\right) \frac{(-1)^n}{2n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{L} c t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{L} x\right)$$

(*) $$\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \operatorname{sen}(n\pi)\cos\frac{\pi}{2} + \cos(n\pi)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$= 0 \cdot 0 + (-1)^n \cdot 1$$

$$= (-1)^n$$