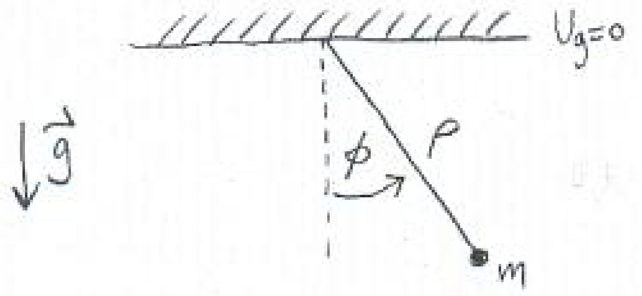
PAUTA P1 C2

a)



Para describir la posición de 1 masa en el espacio son necesarias 3 coordenadas.

En este problema usaremos coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

Hay 2 restricciones:

$\rightarrow z = 0$ (el movimiento sucede en un plano)

$\rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \alpha = cte$

Luego tenemos $3-2=1$ grado de libertad. Las restricciones nos servirán para eliminar coordenadas:

$\hookrightarrow z=0$: la coordenada z siempre tendrá este valor

$\hookrightarrow \frac{d\rho}{dt} = \alpha \Rightarrow \rho(t) = l_0 + \alpha t$, l_0 es el largo inicial de la cuerda. Notemos que del enunciado nos dicen que la cuerda se alarga, i.e., $\alpha > 0$.

Se han eliminado las variables ρ y z, entonces la coordenada generalizada que usaremos será ϕ. 0,5

Calculemos el Lagrangeano

$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$ (posición general en coordenadas cilíndricas)

Con las restricciones, este vector queda:

$$\vec{r} = (l_0 + \alpha t)\hat{\rho} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \alpha\hat{\rho} + (l_0+\alpha t)\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left[\alpha^2 + (l_0+\alpha t)^2\dot{\phi}^2\right] \quad 0{,}5$$

La energía potencial es debida sólo a la potencial gravitatoria: $V = -mg\overbrace{(l_0+\alpha t)}^{\rho}\cos\phi$ 0,5

$$\therefore L = \frac{1}{2}m\left[\alpha^2 + (l_0+\alpha t)^2\dot{\phi}^2\right] + mg(l_0+\alpha t)\cos\phi$$

(b) Las ecuaciones de movimiento, que en este caso es sólo 1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(l_0+\alpha t)^2\dot{\phi} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 2m(l_0+\alpha t)\alpha\dot{\phi} + m(l_0+\alpha t)^2\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mg(l_0+\alpha t)\operatorname{sen}\phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Leftrightarrow m(l_0+\alpha t)^2\ddot{\phi} + 2m\alpha(l_0+\alpha t)\dot{\phi} + mg(l_0+\alpha t)\operatorname{sen}\phi = 0 \quad 1{,}0$$

(c) La fórmula del Hamiltoniano es

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

en este caso:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\dot\phi - L$$

$$= m(l_0+\alpha t)^2\dot\phi^2 - \frac{1}{2}m\alpha^2 - \frac{1}{2}m(l_0+\alpha t)^2\dot\phi^2 - mg(l_0+\alpha t)\cos\phi$$

$$\therefore \quad H = \frac{1}{2}m(l_0+\alpha t)^2\dot\phi^2 - \frac{1}{2}m\alpha^2 - mg(l_0+\alpha t)\cos\phi \qquad 1,0$$

Mientras que la energía mecánica total E:

$$E = T + V$$

$$\therefore \quad E = \frac{1}{2}m(l_0+\alpha t)^2\dot\phi^2 + \frac{1}{2}m\alpha^2 - mg(l_0+\alpha t)\cos\phi \qquad 0,5$$

Vemos claramente que $E \neq H$, de hecho:

$$H - E = -m\alpha^2 \qquad 0,5$$

Nota: → Era de esperarse que $H \neq E$, pues las restricciones dependían explícitamente del tiempo ($\rho = l_0 + \alpha t$)

→ Ya que el Lagrangeano depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano no es constante de movimiento.

(d) $$\frac{dE}{dt} = m(l_0+\alpha t)\alpha\dot\phi^2 + m(l_0+\alpha t)^2\dot\phi\ddot\phi - mg\alpha\cos\phi + mg(l_0+\alpha t)\dot\phi\,\mathrm{sen}\,\phi$$

y usando la ecuación de movimiento (parte (b)), podemos reducir y obtener:

$$\frac{dE}{dt} = -m\alpha\left[(l_0+\alpha t)\dot\phi^2 + g\cos\phi\right] \quad (*) \qquad 1,0$$

FUENTES

La restricción $\frac{d\rho}{dt} = \alpha$ no ocurre naturalmente. Que la cuerda se alargue a una tasa constante es responsabilidad de un agente externo al sistema (un motor, un duende o qué sé yo).
Lo mismo se puede decir de la restricción $z = 0$.

0,5 De estas 2 restricciones, la primera es la responsable de que la energía total cambie en el tiempo.

POTENCIA

De $(*)$ podemos concluir que para $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{dE}{dt} < 0$, es decir, la energía del sistema decrece con el tiempo.