Contol 2

Prof. Claudio Romero   Prof. Aux. Patricio Cubillos, Sebastián Diaz

7 de octubre de 2007

Problema 2:

Elijo el origen de mis coordenadas en el punto de equilibrio. entonces el Lagrangiano del sistema sera:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 - \left\{ \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{k_2}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{k_1}{2}x_2^2 \right\} \tag{1}$$

luego el Lagrangiano de pequeñas oscilaciones es:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^t\, \mathbb{T}\, \dot{\vec{x}} + \frac{1}{2}\vec{x}^t\, \mathbb{V}\, \vec{x} \tag{2}$$

con:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

las frecuencias propias se encuentran resolviendo $\det(\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T}) = 0$

$$\Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{(k_1 + k_2)(m + M)}{2mM} \pm \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)^2(m + M)^2}{4m^2M^2} - \frac{(k_1 + k_2)^2 - k_2^2}{mM}} \tag{5}$$

Problema 3:

a. El Lagrangiano:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mgr\cos\theta \tag{6}$$

Notando que r=R=cte.

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mgR\cos\theta \tag{7}$$

b. Cantidades conservadas? De las eciaciones de Euler Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$ si L no depende de q, entonces $P_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = cte$

$$\Rightarrow P_\phi = mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta = cte \tag{8}$$

Ademas $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ entonces H se conserva.

$$\Rightarrow H = \sum_i P_i\dot{q}_i - L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) + mgR\cos\theta = cte \tag{9}$$

c. y como $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$ entonces E=H.

Reemplazando $\dot{\phi}$ por el momentum generalizado en la energia:

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{P_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta}_{V_{eff}} \tag{10}$$

d. el potencial efectivo es minimo cuando $\partial V_{eff}/\partial\theta = 0$, luego:

$$0 = -\frac{P_\phi^2\cos\theta_0}{mR^2\sin^3\theta_0} - mgR\sin\theta_0 \tag{11}$$

$$\Rightarrow P_\phi^2\cos\theta_0 = -m^2R^3g\sin^4\theta_0 \tag{12}$$

Cuando P_ϕ=0 $\theta_0 = \pi$, y a medida que P_ϕ va creciendo θ_0 se va alejando de π hasta $\pi/2$ o $3\pi/2$.

e.

$$E(\dot{\theta} = 0) = \frac{P_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta \tag{13}$$

⧄