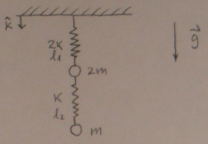
P1 Encontrar los modos normales de oscilación del siguiente sistema de masas y resortes que sólo pueden moverse verticalmente.



Sol.: Solucionaremos este problema en gran detalle e introduciremos una notación más amigable que las sumatorias que han visto en clases (una notación matricial).

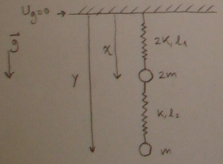
Como este problema tiene 2 masas, en principio necesitamos $3 \cdot 2 = 6$ coordenadas par describir el movimiento del sistema:

$$\text{Partícula 1 } (2m) \longrightarrow (x_1, y_1, z_1)$$
$$\text{Partícula 2 } (m) \longrightarrow (x_2, y_2, z_2)$$

Pero vamos a imponer que el movimiento sea vertical, luego tenemos las restricciones:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ y_1 = 0 & y_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (R)$$

Son en total 4 restricciones y por ende nuestro problema tiene $6-4=2$ grados de liber Las 2 coordenadas generalizadas serán z_1 y z_2 ; por comodidad les cambiaremos el nombre $z_1 = x$, $z_2 = y$. Luego hacemos un dibujito:



Ya tenemos pericia en calcular la energía cinética y potencial para un sistema como este,

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$V = \frac{1}{2}(2K)(x - l_1)^2 + \frac{1}{2} K [y - x - l_2]^2 - (2m) g x - m g y$$

Se escogió en el techo el nivel 0 de U_g.

Con estas 2 cantidades podemos construir el Lagrangeano y luego obtener las ecuaciones que rigen el movimiento. Hoy no estamos interesados en eso. Lo que queremos hacer es calcular los modos normales de oscilación de este sistema...

Para hacer eso debemos hablar un poco sobre equilibrio y estabilidad.

Un sistema está en equilibrio cuando sus constituyentes (las partículas que lo conforman) no están acelerados, o equivalentemente, la fuerza neta sobre ellos es nula.

El estudio de los equilibrios y su estabilidad, para sistemas conservativos (que tienen energía constante), se basa en el estudio de la energía potencial del sistema. Sea V la función energía potencial y supongamos que es una función de varias variables: $V = V(\vec{x})$. Un punto $\vec{x}_e$ (en realidad una configuración de los constituyentes del sistema), es de equilibrio si

$$\vec{\nabla} V\Big|_{\vec{x}_e} = \vec{0}$$ (se anula la 1ª derivada en varias variables)

Un punto de equilibrio $\vec{x}_e$ para un sistema descrito por la energía potencial $V(\vec{x})$ se dice:

ESTABLE si $\mathbb{H}(V)\Big|_{\vec{x}_e}$ es definida positiva

INESTABLE si $\mathbb{H}(V)\Big|_{\vec{x}_e}$ es definida negativa

(positividad o no de la 2ª derivada en varias variables)

$\mathbb{H}(V)$ es la matriz Hessiana de V. Debemos destacar la gran similitud de estas condiciones con las estudiadas en el curso Mecánica donde la función energía potencial dependía de una sola variable; en ese añorado curso, también se analizaba la nulidad de la 1ª derivada de V para analizar equilibrios y el signo de la 2ª derivada de V para determinar la estabilidad.

Nuestro objetivo es estudiar el movimiento de nuestro sistema en las vecindades de alguno de sus puntos de equilibrio estable. Se puede demostrar que dichos movimientos son oscilatorios; nosotros simplemente lo asumiremos sabido. Como sólo nos interesa el comportamiento cerca de un punto de equilibrio estable, aproximaremos las funciones V y T (que conforman el Lagrangeano) por sus series de Taylor en torno al punto de equilibrio estable aproximaremos sólo hasta el segundo orden.

Ocupemos el problema que tenemos a mano:

<u>EQUILIBRIOS</u>: queremos encontrar los (x_e, y_e) que satisfagan $\vec{\nabla} V(x_e, y_e) = \vec{0}$, i.e.:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_e, y_e) = 2K(x_e - l_1) - K[y_e - x_e - l_2] - 2mg = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x_e, y_e) = K[y_e - x_e - l_2] - mg = 0$$

Su solución es:

$$x_e = \frac{3}{2}\frac{mg}{K} + l_1$$

$$y_e = \frac{5}{2}\frac{mg}{K} + l_1 + l_2$$

$\Rightarrow$ resultó que sólo existe un punto de equilibrio

<u>ESTABILIDAD</u>: calculemos primero $[\mathbb{H}(V)](x,y)$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y) = 3K & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x,y) = -K \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x,y) = -K & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y) = K \end{array}\right\} \Rightarrow [\mathbb{H}(V)](x,y) = \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \quad \forall (x,y)$$

$$\therefore [\mathbb{H}(V)](x_e, y_e) = \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$$

En esta ocasión, como el problema es sencillito, la matriz Hessiana dio constante. En general ella depende de las coordenadas y debemos evaluarla en el punto de equilibrio estable.

Ahora "su Taylor" en torno a (x_e, y_e) y sólo hasta el 2° orden:

$$V(x,y) \approx V(x_e, y_e) + \vec{\nabla} V(x_e, y_e) \cdot \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{pmatrix}^t [\mathbb{H}(V)](x_e, y_e) \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{pmatrix}$$

¡Hagamos tira la última ecuación!

→ Sabemos que (x_e, y_e) es nuestro punto de equilibrio estable $\Rightarrow \vec{\nabla} V(x_e, y_e) = 0$

→ Las energías potenciales están definidas salvo una constante, esto proviene de la arbitrariedad en la elección del nivel cero de ésta (recordar por ejemplo U_g!!). Luego podemos sumar o restar la constante que nosotros queremos, y que más nos convenga, a la energía potencial y aún así obtendremos las mismas conclusiones físicas. Por esto es que restaremos $V(x_e, y_e)$ para "echarnos" esa constante que molesta.

→ Definamos: $q_1 \equiv x - x_e$; $q_2 \equiv y - y_e$; $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

→ Ahora en adelante llamaremos $\mathbb{V}$ a la matriz Hessiana de la energía potencial evaluada en el punto de equilibrio estable: $[\mathbb{H}(V)](x_e, y_e) \equiv \mathbb{V}$

Con todas estas aclaraciones y definiciones obtenemos:

$$V \approx \frac{1}{2} \vec{q}^{\,t}\, \mathbb{V}\, \vec{q}$$

($\mathbb{V}$ es una matriz, $\vec{q}$ es un vector, $\vec{q}^{\,t}$ es el vector traspuesto de $\vec{q}$. La combinación $\vec{q}^{\,t} \mathbb{V} \vec{q}$ da un real

Ya tenemos aproximada a la energía potencial, le toca a la energía cinética. Notemos que:

$$q_1 = x - x_e \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{x}$$

$$q_2 = y - y_e \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{y}$$

(porque x_e, y_e son constantes)

Luego:

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2}\left[(2m)\dot{q}_1^2 + m \dot{q}_2^2 \right] \quad (*)$$

Definamos:

$$\dot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^{\,t}\, \mathbb{T}\, \dot{\vec{q}} \quad \text{con} \quad \mathbb{T} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

¡¿Cómo calculé $\mathbb{T}$?! Muy sencillo, el coeficiente (1,1) de la matriz $\mathbb{T}$ es el coeficiente en (*) de $\dot{q}_1^2$, el coeficiente (2,2) de la matriz $\mathbb{T}$ es el coeficiente en (*) de $\dot{q}_2^2$, como no hay términos "cruzados" del tipo $\dot{q}_1 \dot{q}_2$, los coeficientes (1,2) y (2,1) de $\mathbb{T}$ son nulos.

Las matrices simétricas $\mathbb{T}$ y $\mathbb{V}$ jugarán un rol importante en la teoría de los modos normales de oscilación. El Lagrangeano aproximado es:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^{\,t}\, \mathbb{T}\, \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \vec{q}^{\,t}\, \mathbb{V}\, \vec{q}$$

Para determinar, con esta nueva notación matricial, las ecuaciones de Euler-Lagrange, nos será de utilidad la siguiente definición:

$$\text{si } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial a_1} \\ \frac{\partial L}{\partial a_2} \end{pmatrix}$$

Con esta definición las ecuaciones de E-L serán:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \vec{0}$$

Es fácil verificarlo:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Las ecs. de E-L:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las componentes de esta ecuación vectorial son las usuales ecs. de E-L.

Calculemos en forma explícita las ecuaciones de E-L:

(Nota: los cálculos que ahora vienen son tediosos y quizás y sólo quizás nunca se los pregunten, pero los hago para que por lo menos los vean alguna vez)

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{\,t}\,\mathbb{T}\,\dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\vec{q}^{\,t}\,\mathbb{V}\,\vec{q}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\dot{q}_i\,\mathbb{T}_{ij}\,\dot{q}_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} q_i\,\mathbb{V}_{ij}\,q_j$$

Luego:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\dot{q}_i\,\mathbb{T}_{ij}\,\dot{q}_j\right)}}_{0 \text{ (porque no depende explícitamente de } q_k)} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} q_i\,\mathbb{V}_{ij}\,q_j\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\mathbb{V}_{ij}\,q_j + q_i\,\mathbb{V}_{ij}\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right)$$

($\mathbb{V}_{ij}$ no se deriva, pues es una matriz constante)

$$= -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\delta_{ik}\,\mathbb{V}_{ij}\,q_j + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} q_i\,\mathbb{V}_{ij}\,\delta_{jk}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{2}\mathbb{V}_{kj}\,q_j + \sum_{i=1}^{2} q_i\,\mathbb{V}_{ik}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\mathbb{V}_{ki}\,q_i + \sum_{i=1}^{2}\mathbb{V}_{ki}\,q_i\right]$$

(en la 1ª suma cambiamos el nombre al índice mudo y en la segunda suma se usó que $\mathbb{V}$ es simétrica)

$$= -\sum_{i=1}^{2}\mathbb{V}_{ki}\,q_i$$

$$= -\left[\mathbb{V}\,\vec{q}\right]_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\dot{q}_i \mathbb{T}_{ij}\dot{q}_j\right) - \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} q_i \mathbb{V}_{ij} q_j\right)}}_{0\text{ (porque no depende explícitamente de } \dot{q}_k)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}\mathbb{T}_{ij}\dot{q}_j + \dot{q}_i \mathbb{T}_{ij}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}\right) \qquad (\mathbb{T}_{ij} \text{ es una matriz constante})$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\delta_{ik}\mathbb{T}_{ij}\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\dot{q}_i \mathbb{T}_{ij}\delta_{jk}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{2}\mathbb{T}_{kj}\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{2}\dot{q}_i \mathbb{T}_{ik}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\mathbb{T}_{ki}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{2}\mathbb{T}_{ki}\dot{q}_i\right] \qquad (j \text{ índice mudo y } \mathbb{T} \text{ simétrica})$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\mathbb{T}_{ki}\dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{2}\mathbb{T}_{ki}\dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{2}\mathbb{T}_{ki}\ddot{q}_i = \left[\mathbb{T}\ddot{\vec{q}}\right]_k \quad \text{, con lo obvio: } \ddot{\vec{q}} = \begin{pmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{pmatrix}$$

Por componentes tenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \left[\mathbb{T}\ddot{\vec{q}}\right]_k - \left(-\left[\mathbb{V}\vec{q}\right]_k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\mathbb{T}\ddot{\vec{q}} + \mathbb{V}\vec{q}\right]_k = 0 \qquad \forall k \in \{1,2\}$$

Por lo tanto usando la notación matricial,

$$(A) \qquad \mathbb{T}\ddot{\vec{q}} + \mathbb{V}\vec{q} = \vec{0} \qquad \text{es la ec. de E-L.}$$

Ahora que tenemos la ecuación de movimiento para nuestro sistema aproximado en torno a su punto de equilibrio estable, debemos comenzar a discutir qué son los modos normales.

MODOS NORMALES DE OSCILACIÓN: es el movimiento oscilatorio conjunto de cada constituyente del sistema, en torno a una posición de equilibrio estable, con la particularidad que todos los constituyentes oscilan con la misma frecuencia.

La ecuación (A) es difícil de atacar. La mejor estrategia es postular la solución de los modos normales:

$$\vec{q} = \underbrace{\vec{a}}_{\text{amplitudes relativas (vector de constantes)}} e^{i\overbrace{\omega}^{\text{frecuencia de oscilación común a todos los constituyentes del sistema}} t}$$

Recalquemos que: → $\vec{a}$ y ω son incógnitas por determinar

→ se usó el complejo $e^{i\omega t}$ por comodidad de cálculo; al final tomaremos parte real de la solución.

Sustituyamos nuestra adivinanza de solución en (A):

$$\vec{q} = \vec{a}e^{i\omega t} \Rightarrow \dot{\vec{q}} = i\omega\vec{a}e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{\vec{q}} = i^2\omega^2\vec{a}e^{i\omega t} = -\omega^2\vec{a}e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{T}(-\omega^2 \vec{a} e^{i\omega t}) + \mathbb{V}\vec{a} e^{i\omega t} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad e^{i\omega t}\left[\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\right]\vec{a} = \vec{0}$$

La ecuación anterior debe ser válida $\forall t \geq 0$, en particular para $t=0 \Rightarrow e^{i\omega\cdot 0} = 1$

$$\left[\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\right]\vec{a} = \vec{0} \qquad (1)$$

La matriz $\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}$ no puede ser invertible, pues si lo fuera la ecuación anterior entregaría que $\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{q} = \vec{0}$ y buscamos soluciones no triviales. Luego imponemos que esta matriz sea no invertible:

$$\det\left[\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\right] = 0 \qquad (2)$$

Esta es una ecuación polinomial en ω^2 cuyas raíces son las frecuencias propias permitidas con las que todos los constituyentes del sistema podrán oscilar al unísono. Nos falta, para encontrar completamente la solución que nos propusimos probar, determinar los $\vec{a}$ asociados a cada ω permitido.

Ilustremos todo esto con nuestro ejemplo de los resortes. Las matrices $\mathbb{T}$ y $\mathbb{V}$ son:

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \; ; \; \mathbb{V} = \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T} = \begin{bmatrix} 3K - 2\omega^2 m & -K \\ -K & K - \omega^2 m \end{bmatrix}$$

Determinemos las frecuencias propias:

$$0 = \det\left[\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\right] = (3K - 2\omega^2 m)(K - \omega^2 m) - K^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega^4 - \frac{5}{2}\frac{K}{m}\omega^2 + \frac{K^2}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1^2 = 2\frac{K}{m} \quad \vee \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\frac{K}{m}$$

A continuación sustituimos estos valores en (1) y calculamos los respectivos $\vec{a}$:

$\omega_1)$

$$\begin{bmatrix} 3K - 2(2\frac{K}{m})m & -K \\ -K & K - (2\frac{K}{m})m \end{bmatrix}\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -K & -K \\ -K & -K \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_1 = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\omega_2)$

$$\begin{bmatrix} 3K - 2(\frac{1}{2}\frac{K}{m})m & -K \\ -K & K - (\frac{1}{2}\frac{K}{m})m \end{bmatrix}\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & \frac{1}{2}K \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_2 = \beta\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Una manera standard de fijar las constantes λ y β es imponiendo la siguiente condición de "ortonormalidad" con respecto a la matriz $\mathbb{T}$:

$$\vec{a}_i^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_j = \delta_{ij} \qquad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

→ $\vec{a}_1^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_1 = (\lambda, -\lambda)\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda, -\lambda)\begin{pmatrix} 2m\lambda \\ -m\lambda \end{pmatrix} = 2m\lambda^2 + m\lambda^2 = 3m\lambda^2$

Como queremos que $\vec{a}_1^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a} = 1 \Rightarrow 3m\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{3m}}$

→ Hay un teorema que nos asegura que $\vec{a}_1^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_2 = 0 = \vec{a}_2^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_1$ si $\omega_1 \neq \omega_2$, tal como en este caso. Verifiquemoslo.

$$\to \vec{a}_2^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_2 = \left(\tfrac{1}{2}\beta, \beta\right) \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}\beta, \beta\right) \begin{pmatrix} m\beta \\ m\beta \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} m\beta^2 + m\beta^2 = \tfrac{3}{2} m\beta^2$$

Como queremos que $\vec{a}_2^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} m\beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{2}{3m}}$

Se habrán dado cuenta que siempre escogí la raíz positiva ($\lambda = +\frac{1}{\sqrt{3m}}$, $\beta = +\sqrt{\frac{2}{3m}}$) esto es así porque yo quise escogerlo de esta manera. La razón de esta libertad la veremos pronto cuando impongamos condiciones iniciales a estos problemos.

Finalmente los modos normales de oscilación ya ortonormalizados son:

$$\left.\begin{aligned} \vec{q}_1 &= \vec{a}_1\, e^{i\omega_1 t} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\frac{2K}{m}}\,t} \\ \vec{q}_2 &= \vec{a}_2\, e^{i\omega_2 t} = \sqrt{\frac{2}{3m}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\frac{K}{2m}}\,t} \end{aligned}\right\}$$

ahora podríamos tomar parte real para obtener algo con significado físico, pero más adelante veremos que esta notación compleja es útil a la hora de fijar condiciones iniciales ; una vez fijadas ahí se toma parte real.

Cuando estudiemos COORDENADAS NORMALES se verá claramente la "razón de ser" de la condición de ortonormalización

$$\vec{a}_i^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_j = \delta_{ij} .$$

Sólo me queda por contarles que el movimiento más general de oscilación en torno al punto de equilibrio estable es combinación lineal de los modos normales.

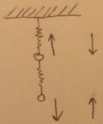
<u>Resumen</u>:

- → Calcular el Lagrangeano del sistema y calcular el punto de equilibrio estable
- → Determinar, con relación a este punto de equilibrio estable, las matrices $\mathbb{T}$ y $\mathbb{V}$
- → A partir de $\det\left[\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\right] = 0$ calcular las frecuencias propias o permitidas de oscilación de los modos normales
- → Con la ecuación matricial $\left[\mathbb{V} - \omega_i^2 \mathbb{T}\right] \vec{a}_i = \vec{0}$ calcular para cada ω_i el respectivo vector $\vec{a}_i$ de amplitudes relativas
- → Ortonormalizar los vectores $\vec{a}_i$ con la condición $\vec{a}_i^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_j = \delta_{ij}$

Y... qué significaban los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ de amplitudes relativas ??

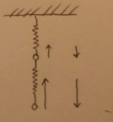
$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to$ las amplitudes están opuestas en signo $\xrightarrow{\text{monísticamente}}$

"las masas oscilan alejándose y luego acercándose con la misma amplitud"

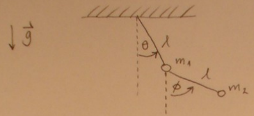


$\vec{a}_2 = \sqrt{\frac{2}{3m}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \to$ las amplitudes tienen el mismo signo $\xrightarrow{\text{monísticamente}}$

"las masas oscilan desplazándose en el mismo sentido, la de más arriba con la mitad de la amplitud de la de abajo"



P2 Encontrar los modos normales de oscilación del péndulo doble restringido al plano de la hoja



Aprovecharemos todo lo dicho en el problema 1 para hacerla corta en este problema.

Este sistema es conservativo (¿por qué?) y su Lagrangeano es $L = T - V$ con:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(m_1+m_2) l^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 m_2 l^2 \cos(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi} + m_2 l^2 \dot{\phi}^2 \right]$$

$$V = - m_1 g l \cos\theta - m_2 g l (\cos\theta + \cos\phi)$$

$$= -(m_1+m_2) g l \cos\theta - m_2 g l \cos\phi$$

EQUILIBRIOS

Calculemos $\vec{\nabla} V$.

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (m_1+m_2) g l \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = m_2 g l \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} V(\theta_e, \phi_e) = \vec{0} \iff \begin{matrix} \operatorname{sen}\theta_e = 0 \\ \operatorname{sen}\phi_e = 0 \end{matrix}$$

Tenemos 2 puntos de equilibrio $\begin{pmatrix} \theta_e \\ \phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \theta_e \\ \phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$

ESTABILIDAD

Calculemos el Hessiano $\mathbb{H}(V)$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = (m_1+m_2) g l \cos\theta \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = m_2 g l \cos\phi$$

$$\Rightarrow [\mathbb{H}(V)](\theta,\phi) = \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g l \cos\theta & 0 \\ 0 & m_2 g l \cos\phi \end{bmatrix}$$

Analicemos la estabilidad de nuestros puntos de equilibrio:

$$[\mathbb{H}(V)](\pi,\pi) = \begin{bmatrix} -(m_1+m_2) g l & 0 \\ 0 & -m_2 g l \end{bmatrix}$$

esta matriz es def. negativa (es diagonal y por ende sus valores propios son $-(m_1+m_2)gl$ y $-m_2 g l$ que son ambos negativos)

$\therefore \begin{pmatrix} \theta_e \\ \phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$ es un punto de equilibrio INESTABLE: no nos interesa

$$[\mathbb{H}(V)](0,0) = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)gl & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix}$$ ésta sí que es def. positiva y entonces $\begin{pmatrix} \theta_e \\ \phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o equilibrio ESTABLE

Como es usual, de ahora en adelante $[\mathbb{H}(V)](0,0) = \mathbb{V}$

$$\therefore \quad \mathbb{V} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)gl & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix}$$

En el problema 1 definimos la coordenadas q_i que eran del estilo $x - x_e$. En este caso, como $\theta_e = \phi_e = 0$, nuestras coordenadas q_i serán $q_1 = \theta$ y $q_2 = \phi$

Construyamos la matriz $\mathbb{T}$:

$$T = \frac{1}{2}\left[(m_1+m_2) l^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 m_2 l^2 \cos(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi} + m_2 l^2 \dot{\phi}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} (m_1+m_2) l^2 & m_2 l^2 \cos(\theta-\phi) \\ m_2 l^2 \cos(\theta-\phi) & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

Noten que T tenía un "término cruzado" $2m_2 l^2 \cos(\theta-\phi)\dot{\theta}\dot{\phi}$ y lo repartimos equitativamente fifty-fifty (50-50) entre los coeficientes fuera de la diagonal para que la matriz quede simétrica; que sea simétrica es importantísimo (revisen los cálculos del P1, ahí se ocupó que $\mathbb{T}$ era simétrica)

¡¡Pero la matriz nos quedó dependiendo de las coordenadas!! La matriz $\mathbb{T}$ también debe ser constante. Luego para que lo sea debemos hacer algo. La teoría nos dice que evaluemos las coordenadas que aparezcan en la matriz $\mathbb{T}$ las evaluemos en el punto de equilibrio estable (después de todo estamos aproximando).

Así $\cos(\theta-\phi) \longrightarrow \cos(\theta_e - \phi_e) = \cos(0-0) = \cos(0) = 1$ y la matriz $\mathbb{T}$ queda:

$$\therefore \quad \mathbb{T} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2) l^2 & m_2 l^2 \\ m_2 l^2 & m_2 l^2 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos todo lo que necesitamos para calcular los modos normales: las matrices $\mathbb{V}$ y $\mathbb{T}$.

<u>FRECUENCIAS PROPIAS</u>

$$\det\left[\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} (m_1+m_2)gl - \omega^2 (m_1+m_2) l^2 & -\omega^2 m_2 l^2 \\ -\omega^2 m_2 l^2 & m_2 g l - \omega^2 m_2 l^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^4 - 2\omega^2 \frac{1}{1-\mu}\frac{g}{l} + \frac{1}{1-\mu}\frac{g^2}{l^2} = 0 \quad ; \quad \mu \equiv \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{1-\mu}\left[1 \pm \sqrt{\mu}\right] \cdot \frac{1 \mp \sqrt{\mu}}{1 \mp \sqrt{\mu}}$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{1 \mp \sqrt{\mu}}$$

AMPLITUDES RELATIVAS:

$$[\mathbb{V} - \omega_i^2 \mathbb{T}]\vec{a}_i = \vec{0}$$

Reemplazamos altiro con $\omega^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{1\pm\sqrt{\mu}}$ y después distinguimos los 2 casos

$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)gl - (m_1+m_2)l^2\frac{g}{l}\frac{1}{1\pm\sqrt{\mu}} & -m_2l^2\frac{g}{l}\frac{1}{1\pm\sqrt{\mu}} \\ -m_2l^2\frac{g}{l}\frac{1}{1\pm\sqrt{\mu}} & m_2gl - m_2l^2\frac{g}{l}\frac{1}{1\pm\sqrt{\mu}} \end{bmatrix}\vec{a} = \vec{0}$$

Multipliquemos la ecuación matricial anterior por $\frac{1}{(m_1+m_2)gl}$, así se nos formará el coeficiente μ en la 2ª columna de la matriz y... :

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{1\pm\sqrt{\mu}} & -\frac{\mu}{1\pm\sqrt{\mu}} \\ -\frac{\mu}{1\pm\sqrt{\mu}} & \mu - \frac{\mu}{1\pm\sqrt{\mu}} \end{bmatrix}\vec{a} = \vec{0}$$

Podemos despejar $\vec{a}$ y se obtiene: $a_1 = \mp\sqrt{\mu}\, a_2$

$$\Rightarrow \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} \mp\sqrt{\mu} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, para $\omega_1^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{1+\sqrt{\mu}}$ se obtiene $\vec{a}_1 = \lambda \begin{pmatrix} -\sqrt{\mu} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = cte \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

para $\omega_2^2 = \frac{g}{l}\frac{1}{1-\sqrt{\mu}}$ se obtiene $\vec{a}_2 = \beta \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = cte \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Nos faltaría utilizar la condición de ortonormalización con respecto a la matriz $\mathbb{T}$, vale decir, imponer que se cumpla:

$$\vec{a}_i^{\,t}\, \mathbb{T}\, \vec{a}_j = \delta_{ij}$$

esto queda propuesto como ejercicio.

Así, con las frecuencias propias y las amplitudes relativas, tenemos todo lo que necesitábamos saber para construir los modos normales.