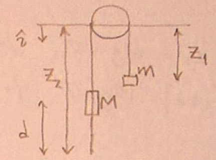
PAUTA P2 C1

(a) Las posiciones de la masa y del carro son:



$$\vec{r}_1 = z_1\,\hat{\imath}$$
$$\vec{r}_2 = (z_2 - d)\,\hat{\imath}$$

Entonces las velocidades serán:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{z}_1\,\hat{\imath}$$
$$\dot{\vec{r}}_2 = (\dot{z}_2 - \dot{d})\,\hat{\imath}$$

Luego la energía cinética del sistema masa-carro es:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}M(\dot{z}_2 - \dot{d})^2 \qquad 1{,}0$$

(b) Las ecuaciones de movimiento

$\underline{z_1}$]

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} = m\dot{z}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1}\right) = m\ddot{z}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial z_1} = 0$$

$$Q_1 = (mg - \tau)\hat{\imath}\cdot\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial z_1} = (mg-\tau)\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = mg - \tau \qquad (\tau: \text{tensión de la cuerda})$$

$$\therefore\quad m\ddot{z}_1 = mg - \tau \qquad (1) \qquad 1{,}0$$

$\underline{z_2}$]

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} = M(\dot{z}_2 - \dot{d}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2}\right) = M(\ddot{z}_2 - \ddot{d})$$

$$\frac{\partial T}{\partial z_2} = 0$$

$$Q_2 = (Mg - \tau)\hat{\imath}\cdot\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial z_2} = (Mg-\tau)\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = Mg - \tau$$

$$\therefore\quad M(\ddot{z}_2 - \ddot{d}) = Mg - \tau \qquad (2) \qquad 1{,}0$$

(c) Despreciemos el radio de la polea y digamos que la cuerda tiene longitud L. Entonces se cumple:

$$z_1 + z_2 = L$$
$$\Rightarrow \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 \qquad (3)$$

Tenemos tres ecuaciones ((1), (2) y (3)) y tres incógnitas ($z_1(t)$, $z_2(t)$ y $\tau(t)$). Lo podemos resolver, vamos!!

$$(1) \Rightarrow \quad m\ddot{z}_1 = mg - \tau \quad / \cdot M \quad \rightarrow \quad Mm\ddot{z}_1 = Mmg - M\tau$$

$$(3) \text{ en } (2) \Rightarrow -M[\ddot{z}_1 + \ddot{d}] = Mg - \tau \quad / \cdot m \quad \rightarrow \quad -Mm\ddot{z}_1 - Mm\ddot{d} = Mmg - m\tau$$

$$-Mm\ddot{d} = 2Mmg - \tau(M+m) \quad (+)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = \frac{Mm}{M+m}\left(2g + \ddot{d}(t)\right) \qquad 0,5$$

Ahora ataquemos $z_1(t)$ y $z_2(t)$.

$$(1) \Rightarrow \quad m\ddot{z}_1 = mg - \tau$$

$$(3) \text{ en } (2) \Rightarrow \quad M[\ddot{z}_1 + \ddot{d}] = -Mg + \tau$$

$$(M+m)\ddot{z}_1 + M\ddot{d} = (m-M)g \quad (+)$$

Integramos 2 veces y consideramos las condiciones iniciales : $\dot{z}_1(0) = \dot{d}(0) = d(0) = 0$ y $z_1(0) = z_1^0$

$$\Rightarrow z_1(t) = z_1^0 - \frac{(M-m)}{(M+m)}\frac{1}{2}gt^2 - \frac{M}{(M+m)}d(t) \quad (4) \qquad 1,0$$

Y como $z_1 + z_2 = L$:

$$\Rightarrow z_2(t) = L - z_1^0 + \frac{(M-m)}{(M+m)}\frac{1}{2}gt^2 + \frac{M}{(M+m)}d(t) \quad (5) \qquad 1,0$$

(d) Si $M = m$, (4) y (5) se convierten en:

$$z_1(t) = z_1^0 - \frac{1}{2}d(t)$$

$$z_2(t) = L - z_1^0 + \frac{1}{2}d(t)$$

La distancia entre el carro y la masa está dada por:

$$\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \left|[z_2 - d(t)] - z_1\right|$$

$$= \left|\left[L - z_1^0 + \frac{1}{2}d(t) - d(t)\right] - \left(z_1^0 - \frac{1}{2}d(t)\right)\right|$$

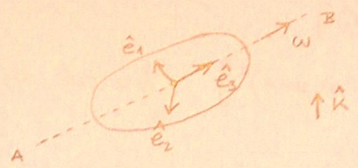
$$= |L - 2z_1^0| \qquad 0,5$$

Nos percatamos que esta distancia es independiente del tiempo, i.e., aunque las posiciones del carro y la masa varíen en el tiempo ($\vec{r}_2(t)$ y $\vec{r}_1(t)$), la distancia entre ellos será la misma a lo largo del tiempo.

NOTA: ¿Por qué no se consideró en el cálculo de Q_2 la fuerza del motor del carrito? Dicha fuerza era la responsable de la restricción correspondiente a saber que se movía $d(t)$ con respecto al extremo de la cuerda. Como la restricción ya estaba impuesta, la fuerza de restricción ya no aparece en las ecuaciones (esa es la gracia de este formalismo)

PAUTA P3 C1

(a) Nuestra elección de ejes principales $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$ (solidarios al sólido):



Recordemos que la energía cinética es la suma de la traslacional del CM con la rotacional c/r CM. En este caso el CM está fijo, luego sólo nos preocupamos de la rotacional.

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\vec{\omega}^t \, \mathbb{I}_{CM} \, \vec{\omega}$$

En la base $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$, $\mathbb{I}_{CM}$ es conocido: $\mathbb{I}_{CM} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$

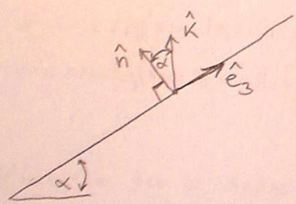
Sólo nos falta calcular $\vec{\omega}$ en la base $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$.

Sabemos que:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{e}_3 + \Omega\hat{k} \qquad (\text{y además } \Omega = \beta t)$$

Nuestro problema se ha reducido a proyectar $\hat{k}$ en la base $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$.

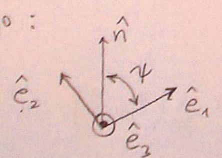
Inspirémonos en el siguiente dibujo:



$\hat{n}$: vector unitario $\perp$ a $\hat{e}_3$ que vive en el plano definido por $\hat{k}$ y $\hat{e}_3$.

$$\Rightarrow \quad \hat{k} = \cos\alpha\,\hat{n} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{e}_3$$

Otro dibujo:



Como $\hat{n} \perp \hat{e}_3$, $\hat{n}$ vive en el plano determinado por $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$.

$$\Rightarrow \quad \hat{n} = \cos\psi\,\hat{e}_1 + \operatorname{sen}\psi\,\hat{e}_2$$

Hemos obtenido:

$$\hat{k} = \cos\alpha\left[\cos\psi\,\hat{e}_1 + \operatorname{sen}\psi\,\hat{e}_2\right] + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{e}_3$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \vec{\omega} &= \Omega\cos\alpha\cos\psi\,\hat{e}_1 + \Omega\cos\alpha\operatorname{sen}\psi\,\hat{e}_2 + (\omega + \Omega\operatorname{sen}\alpha)\hat{e}_3 \\ &= \underbrace{\beta t\cos\alpha\cos\psi}_{\omega_1}\hat{e}_1 + \underbrace{\beta t\cos\alpha\operatorname{sen}\psi}_{\omega_2}\hat{e}_2 + \underbrace{(\omega + \beta t\operatorname{sen}\alpha)}_{\omega_3}\hat{e}_3\end{aligned}$$

Estamos en condiciones de escribir la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{\,t}\,\mathbb{I}_{CM}\,\vec{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\left[I_1 \omega_1^2 + I_1 \omega_2^2 + I_2 \omega_3^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{2}\left[I_1 \beta^2 t^2 \cos^2\alpha + I_2 (\omega + \beta t \,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 \right] \qquad (\text{se usó } \cos^2\psi + \mathrm{sen}^2\psi = 1)$$

2,5

(b) Para calcular las componentes del torque en el sistema solidario (i.e. en la querida base $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$) tenemos a nuestra disposición las Ecuaciones de Euler.

$$\tau_1 = I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3 (I_1 - I_2) = I_1(\beta\cos\alpha\cos\psi - \beta t\cos\alpha\,\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\psi) - (\beta t\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi)(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha)(I_1 - I_2)$$

$$\tau_2 = I_1 \dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1 (I_2 - I_1) = I_1(\beta\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi + \beta t\cos\alpha\,\dot{\psi}\cos\psi) - (\beta t\cos\alpha\cos\psi)(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha)(I_2 - I_1)$$

$$\tau_3 = I_2 \dot{\omega}_3 = I_2 \beta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

2,5

(c) La potencia se define como $\vec{\tau}\cdot\vec{\omega}$. Ya disponemos de expresiones en la misma base (la querida $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^3$) para $\vec{\tau}$ y $\vec{\omega}$.

$$P(t) = \vec{\tau}\cdot\vec{\omega} = \tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2 + \tau_3\omega_3$$

$$\tau_1\omega_1 = I_1(\beta\cos\alpha\cos\psi - \beta t\,\cancel{\cos\alpha\,\dot{\psi}}\,\mathrm{sen}\,\psi)\beta t\cos\alpha\cos\psi - \beta t\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi\,(I_1 - I_2)(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha)\beta t\cos\alpha\cos\psi$$

$$\tau_2\omega_2 = I_1(\beta\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi + \beta t\,\cancel{\cos\alpha\,\dot{\psi}}\cos\psi)\beta t\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi - \beta t\cos\alpha\cos\psi\,(I_2 - I_1)(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha)\beta t\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$\tau_3\omega_3 = I_2(\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

$$(+)\quad P(t) = I_1 \beta^2 t\cos^2\alpha + I_2(\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha) \qquad (\text{nuevamente se usó } \cos^2\psi + \mathrm{sen}^2\psi = 1)$$

1,0

NOTA: Si nos acordamos de Cálculo en Varias Variables:

$$\frac{d}{dt}(T) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{\omega}^{\,t}\,\mathbb{I}_{CM}\,\vec{\omega}\right) = \vec{\omega}^{\,t}\,\mathbb{I}_{CM}\,\dot{\vec{\omega}} = \vec{\omega}^{\,t}\frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_{CM}\vec{\omega}\right) = \vec{\omega}^{\,t}\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt}$$

$\mathbb{I}_{CM}$ no depende del tiempo

$$= \vec{\omega}^{\,t}\,\vec{\tau}_{CM}$$

$$= \vec{\tau}\cdot\vec{\omega}$$ $\rightarrow$ nos ahorramos el índice CM (obviamente el torque calculado en (b) es c/r al CM)

$$= P(t)$$

Corroborémoslo:

$$\frac{d}{dt}(T) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left[I_1\beta^2 t^2\cos^2\alpha + I_2(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2\right]\right) = I_1\beta^2 t\cos^2\alpha + I_2(\omega + \beta t\,\mathrm{sen}\,\alpha)\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$