Examen

FI21B - Sistemas Dinámicos
Prof. N. Mujica
Profs. Auxs. David Chen, Ignacio Ortega y Carlos Suazo
Sábado 3 de diciembre de 2005
Duración: 3 hrs

P1. Mecánica de Lagrange. Una masa m se encuentra unido al extremo de un resorte de largo natural l_o y constante k. El otro extremo del resorte se encuentra fijo a una mesa horizontal de superficie pulida. La masa se mueve radial y angularmente en el plano de la mesa. El resorte no se dobla, sólo se estira y comprime.

(a) ¿Cuales son las restricciones al movimiento y cuántos grados de libertad tiene el sistema? (1.2 pts)

(b) Escriba el Lagrangeano del sistema usando coordenadas polares. (1.2 pts)

(c) Obtenga las ecuaciones de movimiento. (1.2 pts)

(d) Determine los momentos generalizados p_r y p_θ. (1.2 pts)

(e) Determine las cantidades conservadas. (1.2 pts)

P2. Inestabilidad de la Elástica. La primera inestabilidad de la cual se tiene conocimiento es el pandeo de una placa elástica sometida a una carga. El estudio de esta inestabilidad fue hecho por Euler en 1759. Un modelo simplificado de este sistema es el siguiente.

Considere una placa metálica empotrada en el punto O, como se muestra en la figura. La placa está caracterizada por una masa m, momento de inercia I_o y el centro de masa se encuentra a una distancia l respecto al punto fijo O. Para dar cuenta elasticidad de la placa considere un resorte de restitución, el cual genera un torque en direccion ortogonal al plano de la figura proporcional al ángulo que forma la placa con la vertical ($|\tau| = k\theta$). Este resorte de restitución es tiene la forma de una espiral, como se indica en la figura. Sobre la placa empotrada se coloca una carga de masa M. El sistema se encuentra en un campo de gravedad de constante g.

(a) Determine el Lagrangeano del sistema. (1 pt)

(b) Encuentre la ecuación de movimiento que caracteriza a la placa. Verifique que en los casos $k = 0$ y $g = 0$ se obtienen los resultados esperados (Analice estos casos por separado). (2 pts)

(c) ¿Cuáles y cuántos son los puntos de equilibrio del sistema? (1.5 pts)

(d) Considere $k > mgl$. Demuestre que existe un valor crítico de la masa de la carga M_c bajo la cual la posición $\theta = 0$ es un equilibrio estable, y que para $M > M_c$ es equilibrio deviene inestable. (1.5 pts)

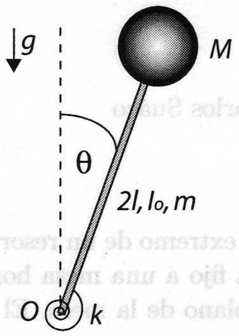

Figura P2

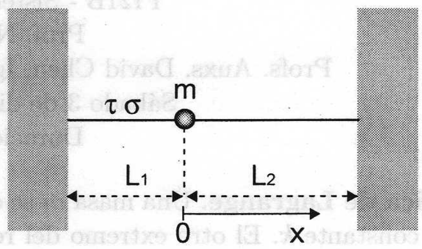

Figura P3

P3. Ondas estacionarias y auto-adaptación. Una cuerda de largo L y densidad de línea σ se encuentra bajo una tensión τ. En el limite de pequeñas vibraciones, esta cuerda es descrita por la ecuación de onda unidimensional. Una masa puntal m se coloca una distancia L_1 respecto extremo izquierdo de la cuerda y a una distancia L_2 del otro extremo ($L_1 + L_2 = L$). Considere por ahora que la masa no desliza sobre la cuerda. Tome su sistema de coordenadas como se indica en la figura, con el origen en la posición de la masa.

(a) Escriba las condiciones de borde en $x = -L_1$ y $x = L_2$ como también las condiciones a la interfaz $x = 0$. (1 pt)

(b) Demuestre que los modos resonantes de este sistema corresponden a ondas estacionarias de frecuencia angular ω y número de onda k que cumplen la siguiente ecuación trascendental: (1.5 pts)

$$\left(\frac{mL\omega^2}{2\tau}\right)[\cos(k(L_1 - L_2)) - \cos(kL)] = kL\sin(kL). \qquad (1)$$

(c) Demuestre que los en casos $L_1 = 0$ (o $L_2 = 0$) y $m = 0$ la ecuación trascendental anterior se simplifica mucho. Ahora usted puede resolver esta ecuación. Interprete su resultado para ambos casos y explique porque los espectros de modos resonantes son iguales. (1.5 pts)

Nota: El espectro de modos resonantes corresponde al conjunto discreto de números de onda, y por lo tanto de frecuencias, que son resonantes.

(d) A partir de la ecuación (1) y usando la relación de dispersión $\omega = ck$, con $c^2 = \tau/\sigma$, se encuentra una ecuación de la forma $k = f(k)$, con $f(k)$ una función no trivial. Para el caso $L_1 = L_2 = L/2$, muestre mediante un análisis gráfico que los modos resonantes corresponden a las intersecciones de dos funciones, y que en principio hay infinitas pero numerables soluciones. (1 pt)

(e) Suponga ahora que la masa puede moverse sobre la cuerda. Se ha demostrado experimentalmente que este sistema se comporta como un *oscilador auto-adaptativo.* Esto significa que el sistema se adapta de modo de mantenerse resonante. Considere que la masa se encuentra inicialmente en el medio de la cuerda ($L_1 = L_2 = L/2$), pero que el sistema es forzado a una frecuencia f_o que corresponde a la frecuencia de resonancia fundamental de la ecuación (1) con $L_1 = 0$ (o $L_2 = 0$), es decir como si la masa estuviese en un extremo. ¿Qué espera usted que ocurra durante el proceso de auto-adaptación? ¿Cuál será la posición final de la masa? (1 pt)