Examen

FI21B - Sistemas Dinámicos
Prof. Nicolás Mujica
Profs. Auxs. Gustavo During y Carlos Suazo
Martes 5 de Julio de 2005
Duración: 3 hrs

P1. Péndulo de Andronov. Una masa m puede deslizar sin roce sobre un aro de radio R y de momento de inercia I, tal como se muestra en la figura. Este aro gira con velocidad angular constante Ω. El sistema se encuentra en una campo gravitacional de constante g.

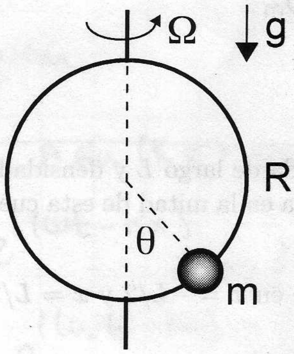
(a) Determine el Lagrangeano del sistema.

(b) Escriba las cantidades conservadas justificando su respuesta.

(c) Escriba la ecuación de movimiento de la masa m y determine los puntos de equilibrio tales que $\ddot{\theta} = 0$.

(d) Usando las cantidades conservadas defina el potencial efectivo $V_{ef}(\theta)$. Verifique que los puntos de equlibrio que se obtienen con este potencial son los mismos que aquellos obtenidos en la parte (c).

(e) Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio encontrados en (c), ya sea a partir de la ecuación de movimiento para θ o a partir del potencial efectivo $V_{ef}(\theta)$. Muestre que existe una velocidad de rotacion crítica $\Omega = \Omega_c = \sqrt{g/R}$ donde la estabilidad de la masa m cambia en forma drástica.



P2. Pequeñas oscilaciones.

(A) Sean V y T las energías potencial y cinética que describen un sistema de n coordenadas generalizadas $q_1, ..., q_n$. En torno a los puntos de equilibrio estas cantidades pueden escribirse de la forma

$$V \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{jk} q_j q_k \quad (1)$$

$$T \approx \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (2)$$

donde las matrices $\tilde{A}$ y $\tilde{m}$ son constantes y simétricas ($A_{jk} = A_{kj}$, $m_{jk} = m_{kj}$).

(a) Usando las ecuaciones de Lagrange, muestre que las ecuaciones de movimiento son de la forma

$$\sum_{k=1}^{n}(A_{lk}q_k + m_{lk}\ddot{q}_k) = 0, \qquad \forall\, l = 1, ..., n \tag{3}$$

(b) Suponga soluciones oscilatorias $q_l = a_l e^{i\omega t}$ y muestre que la ecuación para las frecuencias características está dada por

$$det(\tilde{A} - \omega^2\tilde{m}) = 0. \tag{4}$$

Justifique su respuesta.

(c) A qué corresponden los modos normales del sistema ?

(B) Un péndulo doble es formado por dos masas iguales m y cuerdas sin masa de largo constante l, como muestra la figura. Para este sistema encuentre las frecuencias propias y los modos normales en el límite de pequeñas oscilaciones.

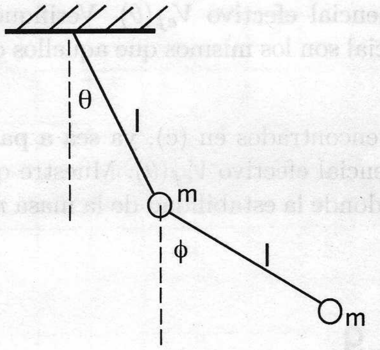


Figura P2

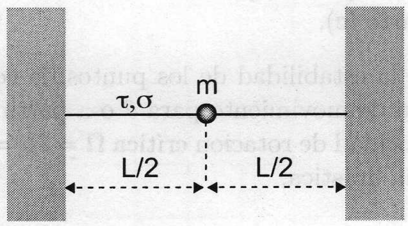


Figura P3

P3. Ondas estacionarias. Una cuerda de largo L y densidad de línea σ se encuentra bajo una tensión τ. Una masa puntal m se coloca en la mitad de esta cuerda, de modo que no desliza sobre ella.

(a) Escriba las condiciones de borde en $x = -L/2$ y $x = L/2$ como también las condiciones a la interfaz $x = 0$.

(b) Para ondas estacionarias, obtenga la ecuación trascendental para el número de onda k

$$\left(\frac{m}{\sigma L}\right) kL(1 - \cos(kL)) = 2\sin(kL). \tag{5}$$

(c) A partir del resultado obtenido en (b) muestre que un conjunto de frecuencias de resonancia son iguales a los modos *anti-simétricos* del problema con $m = 0$. Interprete físicamente este resultado.

(d) Muestre que para otro conjunto de frecuencias de resonancia siempre existe al menos una solución. Para ello basta con hacer un análisis gráfico.