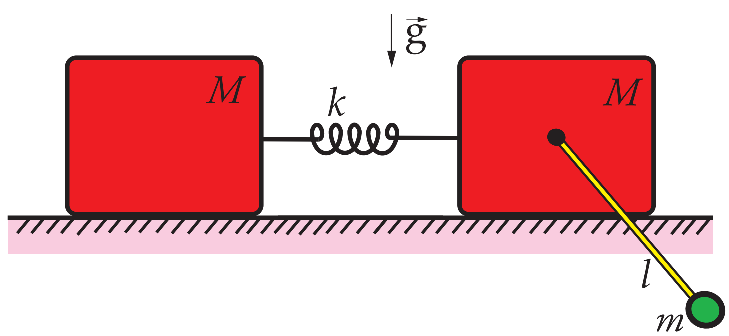
Sistemas Dinámicos

Control 3

Profs: Felipe Barra y René Rojas
Tiempo: 3 horas

Problema 1: Pequeñas Oscilaciones

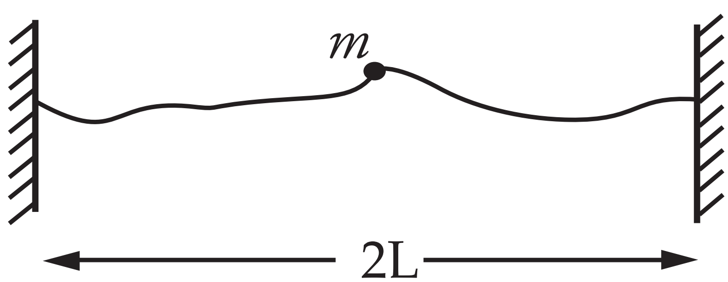
Considere un sistema compuesto por dos bloques de masa M, conectados entre si por un resorte de constante elástica k, que deslizan sobre una superficie horizontal sin roce, sobre uno de los bloques cuelga, desde su centro, un péndulo de largo l y masa m, como se ilustra en la figura.



a) Encuentre el lagrangeano de pequeñas oscilaciones.
b) Para $g/l = k/M \equiv \omega_o^2$, Calcule las frecuencias propias del sistema.
c) Y obtenga los modos normales de oscilación, descríbalos cualitativamente.

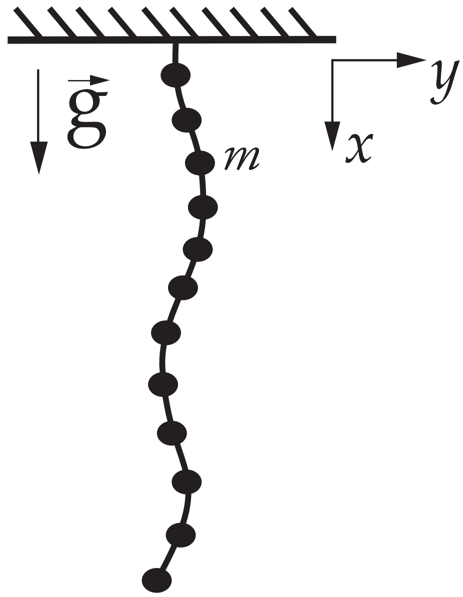
Problema 2 : Ondas en una Cuerda

Una cuerda de largo $2L$, densidad lineal σ y tensión τ, se encuentra sujeta en sus extremos a dos paredes. En al mitad de la cuerda está aderida a ella una masa puntual m. Encuentre las frecuencias propias de oscilación de la cuerda.



Problema 3 : Ecuación de Onda

Considere un sistema de N masas iguales m, unidas entre si por una cuerda de masa despreciable y separadas por una distancia a. Este sistema se encuentra sujeto de un extremo y cuelga en presencia de la gravedad como muestra la figura.



a) Si se consideran pequeños desplazamientos de las masas con respecto a la vertical, encuentre el sistema de ecuaciones que describe el movimiento de las masas.[1]

b) Muestre que en el límite continuo, en que $a \to 0$, $N \to \infty$, de modo que $Na = L$ fijo se obtiene la ecuación de la cuerda vertical, es decir [2]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x}\left((L - x)\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

[1] Indicación: haga un digrama de cuerpo libre para una partícula n arbitraria.

[2] Considere que cuando toma el límite continuo esta se mantiene fija a una altura x, es decir $na \to x$ cuando $a \to 0$ y $N \to \infty$.

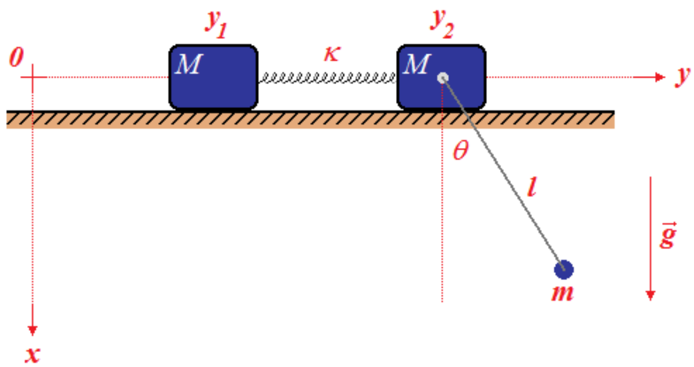
FI21B SISTEMAS DINÁMICOS

SEMESTRE: Primavera 2007
PROFESORES: Felipe Barra, René Rojas
AUXILIARES: Ignacio Ortega, Maximiliano Salinger, Maite Cerda, Viviana Guzmán

Pauta Control N°3

Problema N°1

Para simplificar el problema supondremos que el resorte tiene largo natural cero y que los bloques son intangibles. Utilizamos el sistema de referencia de la figura y notamos que el sistema tiene tres grados de libertad: $\vec{q} = (y_1, y_2, \theta)$.



Posiciones de las partículas:

$\vec{r}_1 = y_1\hat{y}$ $\qquad$ $\vec{v}_1 = \dot{y}_1\hat{y}$

$\vec{r}_2 = y_2\hat{y}$ $\qquad$ $\vec{v}_2 = \dot{y}_2\hat{y}$

$\vec{r}_3 = y_2\hat{y} + l\hat{\rho}$ $\qquad$ $\vec{v}_3 = \dot{y}_2\hat{y} + l\dot{\theta}\hat{\theta}$

Energía cinética:

$T_1 = \frac{1}{2}M\dot{y}_1^2$ $\qquad$ $T_2 = \frac{1}{2}M\dot{y}_2^2$ $\qquad$ $T_3 = \frac{1}{2}m(\dot{y}_2^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta))$

$$T_3 = \tfrac{1}{2}(M\dot{y}_1^2 + (M+m)\dot{y}_2^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + 2ml\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta)) \approx \tfrac{1}{2}(M\dot{y}_1^2 + (M+m)\dot{y}_2^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + 2ml\dot{y}\dot{\theta})$$

Matriz de Masa: $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M+m & ml \\ 0 & ml & ml^2 \end{bmatrix}$

Energía Potencial:

$$U = \tfrac{1}{2}\kappa(y_2 - y_1)^2 - mgl\cos(\theta) \approx \tfrac{1}{2}\kappa(y_2 - y_1)^2 - mgl(1 - \tfrac{1}{2}\theta^2)$$

$\nabla U = (\ \kappa(y_2 - y_1)\ ,\ \kappa(y_1 - y_2)\ ,\ mgl\sin(\theta))$ $\qquad$ $\mathbb{H}U = \begin{bmatrix} \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & mgl\cos(\theta) \end{bmatrix}$

Punto de equilibrio: Si $\vec{q} = \vec{0}$ entonces $\nabla U = \vec{0}$ y $\mathbb{H}U = \begin{bmatrix} \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & mgl \end{bmatrix} \equiv \mathbb{V}$

Notar que $\mathbb{V}$ es una matriz semidefinida positiva: los determinantes de sus bloques de 1x1, 2x2 y 3x3 partiendo de la esquina inferior derecha son mgl, κmgl y cero respectivamente.

a) Lagrangeano:

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}(M\dot{y}_1^2 + (M+m)\dot{y}_2^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + 2ml\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta)) - \tfrac{1}{2}\kappa(y_2 - y_1)^2 + mgl\cos(\theta)$$

$$\approx L^{[2]} = \tfrac{1}{2}(M\dot{y}_1^2 + (M+m)\dot{y}_2^2 + ml^2\dot{\theta}^2 + 2ml\dot{y}\dot{\theta}) - \tfrac{1}{2}\kappa(y_2 - y_1)^2 + mgl(1 - \tfrac{1}{2}\theta^2)$$

b) Frecuencias Propias: $det(\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T}) = 0$

$$det\begin{pmatrix} \kappa - M\omega^2 & -\kappa & 0 \\ -\kappa & \kappa - (M+m)\omega^2 & -ml\omega^2 \\ 0 & -ml\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\kappa - M\omega^2)\big((\kappa - (M+m)\omega^2)(mgl - ml^2\omega^2) - (ml\omega^2)^2\big) - \kappa^2(mgl - ml^2\omega^2) = 0$$

Reemplazamos $\kappa = M\omega_0^2$, $g = l\omega_0^2$:

$$(M\omega_0^2 - M\omega^2)\Big((M\omega_0^2 - (M+m)\omega^2)(ml^2\omega_0^2 - ml^2\omega^2) - (ml\omega^2)^2\Big) - (M\omega_0^2)^2(ml^2\omega_0^2 - ml^2\omega^2) = 0$$

Dividimos por mM^2l^2 :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\left(\left(\omega_0^2 - (1 + \tfrac{m}{M})\omega^2\right)(\omega_0^2 - \omega^2) - \tfrac{m}{M}(\omega^2)^2\right) - (\omega_0^2)^2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$$

Hacemos un poco de álgebra (Nótense los factores comunes):

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\omega^2\left(\omega^2 - (2 + \tfrac{m}{M})\omega_0^2\right) = 0$$

Frecuencias Propias: $\omega_1^2 = 0$ $\omega_2^2 = \omega_0^2$ $\omega_3^2 = (2 + \tfrac{m}{M})\omega_0^2$

c) Modos Propios: $(\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T})\cdot\vec{u} = \vec{0}$. Diremos que $\vec{u} = (a, b, c)$

1.- Caso $\omega_1^2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa & 0 \\ -\kappa & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & mgl \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $a = b$, $c = 0$

Escogemos $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$

El resorte permanece en su largo natural y el péndulo cuelga en posición vertical. Todo el sistema está en reposo o se mueve con velocidad constante.

2.- Caso $\omega_2^2 = \omega_0^2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ -\kappa & -m\omega_0^2 & -ml\omega_0^2 \\ 0 & -ml\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dividimos por $-\omega_0^2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & M & 0 \\ M & m & ml \\ 0 & ml & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

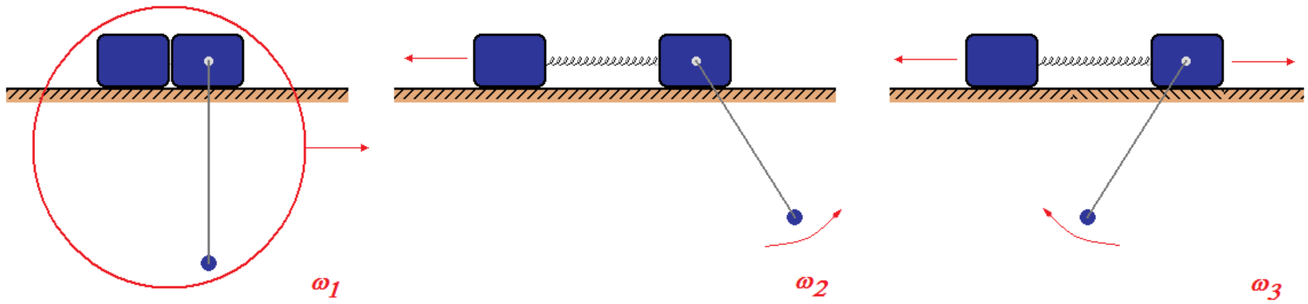
Solución: $b = 0$, $a = -\tfrac{m}{M}lc$. Escogemos $\vec{u}_2 = (ml, 0, -M)$

El segundo bloque permanece en reposo. El primer bloque y el péndulo oscilan en direcciones opuestas. El centro de masa del sistema permanece estático.

3.- Caso $\omega_3^{\ 2} = (2 + \frac{m}{M})\omega_0^{\ 2}$

Solución: $b = -(1 + \frac{m}{M})a$, $c = \frac{1}{l}(2 + \frac{m}{M})a$. Escogemos $\vec{u}_3 = (Ml, -(M+m)l, 2M+m)$

(El desarrollo queda propuesto) El primer bloque y el péndulo oscilan en un mismo sentido, aunque con diferente amplitud. El segundo bloque oscila en sentido opuesto. El centro de masa del sistema permanece estático.



d) Matriz de Pasaje:

$$\mathbb{P} = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & ml & Ml \\ 1 & 0 & -(M+m)l \\ 0 & -M & 2M+m \end{bmatrix}$$

Coordenadas Propias: $\vec{q} = \mathbb{P} \cdot \vec{\Theta}$:

$$y_1 = \Theta_1 + ml\Theta_2 + Ml\Theta_3 \quad , \quad y_2 = \Theta_1 - (M+m)l\Theta_3 \quad , \quad \theta = -M\Theta_2 + (2M+m)\Theta_3$$

Invertimos el sistema para obtener $\vec{\Theta}$:

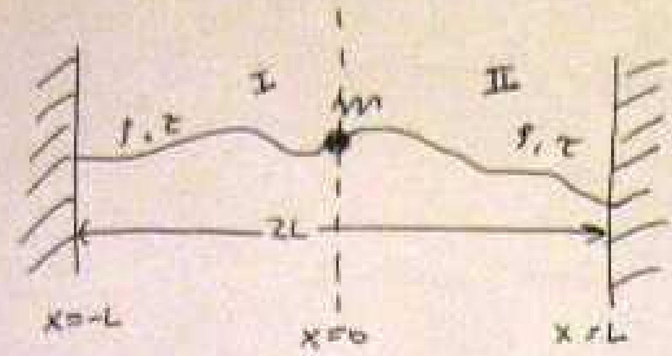
$$\Theta_1 = \frac{My_1 + (M+m)y_2 + ml\theta}{2M+m} \quad , \quad \Theta_2 = \frac{y_1 - y_2 - ml\theta}{l(M+m)} \quad , \quad \Theta_3 = \frac{M(y_1 - y_2) + ml\theta}{l(M+m)(2M+m)}$$

Normalmente conviene normalizar los valores propios antes de construir la matriz de pasaje. El hecho de que los distintos componentes de cada valor propio tienen unidades diferentes dificulta este paso (Por ejemplo, se tendría que hacer un cambio de variables del tipo $q_3 = l\theta$ para solucionar esto). Por esta ocasión se dejará así.

Asignación de Puntaje:

Parte (a)	*2.0*
Parte (b)	*1.5*
Parte (c)	*2.0*
Parte (d)	*0.5*
Punto Base	*1.0*
Total	*7.0*

Problema N°2



Cuerda tensión τ, densidad ρ (en lineal)

masa en el centro (m)

$\boxed{\text{Encontrar frecuencias propias}}$

- Planteamos solución de variables separadas de la ecuación de ondas en la cuerda, separamos en dos regiones debido a la masa puntual en el centro.

$$\psi = \begin{cases} \psi_I = (A \operatorname{sen} kx + B\cos kx)\, e^{-i\omega t} & ; -L \le x \le 0 \\ \psi_{II} = (C \operatorname{sen} kx + D\cos kx)\, e^{-i\omega t} & ; 0 \le x \le L \end{cases} \qquad (1)$$

- Ahora imponemos condiciones de borde:

↳ En $x=0$ $\quad \psi_I(0,t) = \psi_{II}(0,t)$ (continuidad en $x=0$)

↳ En $x=-L$, ↳ En $x=L$ $\Big\}$ $\psi(\pm L, t) = 0$ ↳ $\psi_I(-L,t) = 0$, $\psi_{II}(L,t) = 0$

↳ Condición que sale de balance de fuerzas (*)

- <u>Continuidad</u>

$$\psi_I(0,t) = B\cancel{e^{-i\omega t}} = D\cancel{e^{-i\omega t}} = \psi_{II}(0,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{B = D} \qquad (2)$$

- <u>$x=-L$</u>

$$\psi_I(-L,t) = 0 \Rightarrow -A\operatorname{sen}(kL) + B\cos(kL) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A \operatorname{tg}(kL) = B} \qquad (3)$$

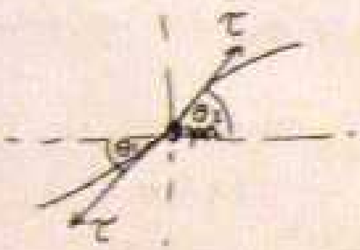
• $\psi_{II}(L,t)=0 \Rightarrow C\,\text{sen}(kL)+D\cos(kL)=0$

$$\Rightarrow \boxed{C\,tg(kL) = -D} \qquad ④$$

• Además de ② y ③ ⇒ ④

$$\Rightarrow \boxed{A=-C}$$

• Condición desde el balance de fuerzas en $\underline{x=0}$



$$\frac{\sum F_y}{m} = a_y$$

$$\Rightarrow \tau(\text{sen}\theta_2 - \text{sen}\theta_1) = m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

La aproximación de pequeñas oscilaciones $\text{sen}\theta \approx tg\theta \approx \frac{\partial\psi}{\partial x}$

$$\rightarrow \tau\left(\frac{\partial\psi_{II}}{\partial x} - \frac{\partial\psi_{I}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\Bigg|_{x=0}$$

→ ψ puede ser ψ_I ó ψ_{II} por continuidad

elegimos

$$\boxed{\tau\left(\frac{\partial\psi_{II}}{\partial x} - \frac{\partial\psi_{I}}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = m\frac{\partial^2\psi_{II}}{\partial t^2}\Bigg|_{x=0}} \qquad ⑤$$

evaluando en $x=0$:

$$\boxed{\tau k(C-A) = -m\omega^2 B}$$, como $\underline{C=-A}$ ...

$$2\tau k(C) = -m\omega^2 A\,tg(kL)$$

$$\Rightarrow +2\tau k(A) = +m\omega^2 A\,tg(kL)$$

$$\boxed{tg(kL) = \frac{2\tau}{m}\frac{k}{\omega^2} = \frac{2\tau}{mc^2}\frac{1}{k}} \qquad ⑥$$

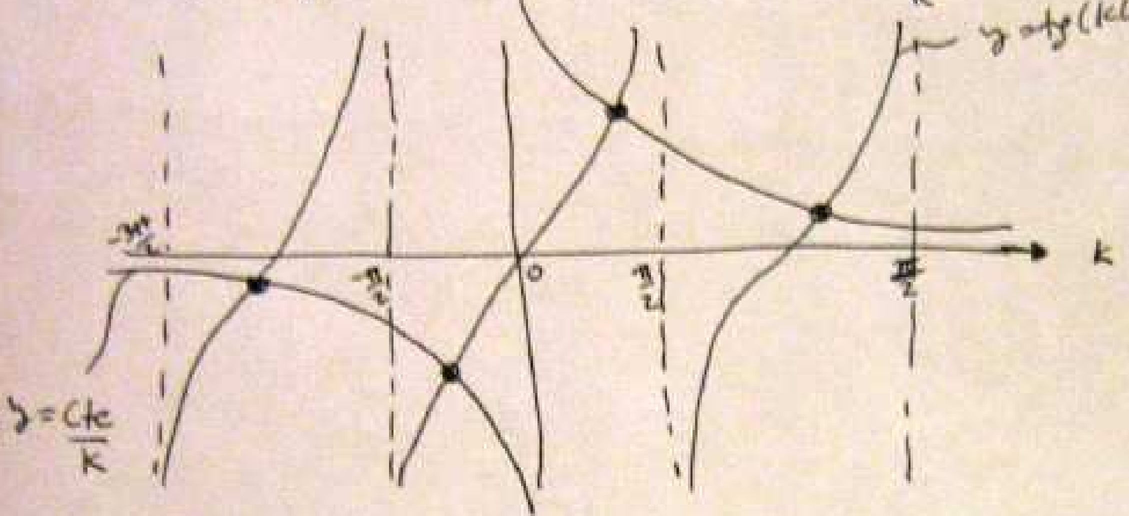
Ecuación para k_n equivalente a una para ω_n, pues $\boxed{\omega_n = c\,k_n}$

Tenemos la ecuación trascendental para las frecuencias propias

$$\boxed{tg\left(k_n L\right) = \left(\frac{2T}{mc^2}\right)\frac{1}{k}}$$

Graficamos las funciones

$y^1 = tg(kL)$ y $y^2 = (Cte)\,\frac{1}{k}$



Evidentemente la ecuación ① se satisface cuando $y^1 = y^2$, luego los ptos de intersección representan los k_n soluciones.

extra: para $k_n \to \pm\infty$ $\quad \frac{1}{k_n} \to 0$

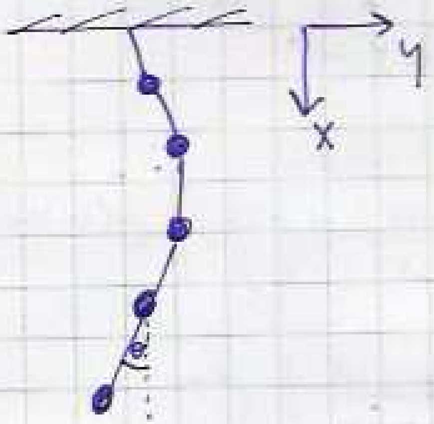
y $tg\left(k_n L\right) \approx 0$ $\quad$ cuando $k_n \to \pm\infty$

luego $k_n L = n\pi \Rightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}}$ (en especial $+\infty$)

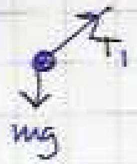
Asignación de Puntaje:

Soluciones de Ecuación de Onda por tramos bien planteada	*1.0*
Condiciones de borde habituales (Continuidad, Extremos Fijos:	*1.5*
Balance de fuerzas: condición de borde en $x = 0$	*1.5*
Ecuación Trascendental para k_n ó ω_n equivalentemente	*1.0*
Encontrar gráficamente los k_n ó los ω_n	*1.0*
Punto Base	*1.0*
Total	*7.0*

PAUTA C3 P3



DCL



$$T_1 = (N-1)mg$$

$$\rightarrow T_i = (N-i)mg$$

a) $m\ddot{x}_i = T_i \cos\theta_i - T_{i-1}\cos\theta_{i-1} + mg = 0$

$m\ddot{y}_i = T_i \operatorname{sen}\theta_i - T_{i-1}\operatorname{sen}\theta_{i-1}$

Aprox. a pequeñas osc. :

$$m\ddot{x} = T_i - T_{i-1} + mg$$

$$m\ddot{y}_i = T_i \operatorname{tg}\theta_i - T_{i-1}\operatorname{tg}\theta_{i-1}$$
$$= T_i\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right) - T_{i-1}\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$$

$\ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_i = T_{i-1} - mg$

$$(N-i)mg + mg = T_{i-1}$$

$$\rightarrow T_{i-1} = (N-i+1)mg$$

$$\therefore \quad \ddot{y} = (N-i)g\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)$$

$$-(N-i+1)g\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)$$

$$\ddot{y} = (N-i)g\left[\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)-\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)\right]$$

$$-g\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)$$

b) como $(x_{i+1}-x_i) \sim a = (x_i - x_{i-1})$

$$\ddot{y} = (N-i)ga\left[\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{(x_{i+1}-x_i)(x_i-x_{i-1})}\right]-g\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)$$

como ~~xxxxxxxxxx~~ $(x_{i+1}-x_i) \rightarrow \Delta x$

$i \cdot a \rightarrow x$

$N \cdot a \rightarrow L$

$$\ddot{y} = g\left[(L-x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

o lo q' es lo mismo:

$$\ddot{y} = \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left((L-x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$