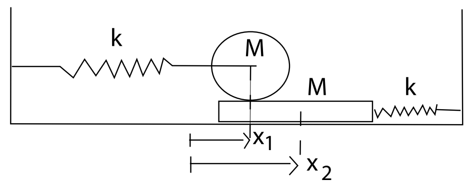
Sistemas Dinámicos

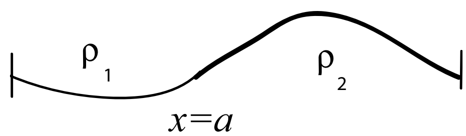
Examen: Tiempo: **2h:45m**
Prof: Felipe Barra, Aux: Maximiliano Moyano

Problema 1
Un disco de masa M y radio R puede rodar sin resbalar sobre una plataforma horizontal de masa igual M. La plataforma puede rodar sin roce sobre el suelo. El centro del disco y la plataforma estan unidos por resortes de constante elástica k a puntos fijos como se indica en la figura. Si x_1 indica el desplazamiento absoluto del disco y x_2 el desplazamineto absoluto de la plataforma ambos respecto a su posición de equilibrio determine:



(3pts) a) Las frecuencias propias de oscilación
(3pts) b) Las coordenadas normales en términos de x_1 y x_2.

Problema 2
Considere una cuerda de largo l y extremos fijos. La cuerda se forma por la unión en un punto de coordenada $x = a$ de un segmento de densidad ρ_1 y otro de ρ_2 como muetra la figura: La tensión τ en toda la cuerda es la misma.



.

(1pt) a) Escriba la ecuación de onda para el desplazamiento vertical $\mu(x,t)$ en cada segmento indicando explicitamente el valor de la velocidad de la onda en cada medio.

(2 pts) b) Deduzca (y explique) las dos condiciones de borde que se deben satisfacer en $x = a$.

(3pts) c) Calcule el valor de a para que la cuerda oscile de modo tal que $x = a$ sea el único nodo, osea el único punto en el que $\mu(x,t) = 0 \forall t$. Determine el valor de la frecuencia de esta oscilación.

Problema 3
Partiendo de la ecuación de conservación de la energía de una onda sonora

$$\partial_t e(\vec{r},t) + \nabla \cdot (p_e \vec{v_e}) = 0$$

demuestre que $e(\vec{r},t)$ satisface la ecuación de onda

$$\partial_t^2 e(\vec{r},t) - c^2 \nabla^2 e(\vec{r},t) = 0$$

Para esto le será útil recordar:
a) $\nabla \cdot ((\nabla \cdot \vec{v}_e)\vec{v}_e) = \nabla^2 \vec{v}_e^2/2$ puesto que $\nabla \times \vec{v}_e = 0$
b) la definición $e(\vec{r},t) = \rho_0 \vec{v}_e^2/2 + c^2 \rho_e^2/(2\rho_0)$