Sistemas Dinámicos

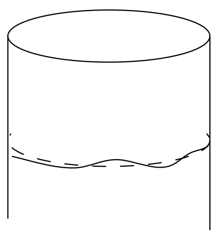
Control 3: **Tiempo: 3** horas
Prof: Felipe Barra, Aux: Carlos Orellana, Eduardo Saavedra

Problema 1
Considere una cuerda de largo L y tensión τ cuyos extremos se unen en torno a un cilindro de modo que el desplazamiento cumple

$$u(0,t) = u(L,t) \text{ y } u'(0,t) = u'(L,t) \quad \forall t$$

.

Resuelva la ecuación de onda para $u(x,t)$ por el método de Bernouilli (modos normales). Las condiciones iniciales son $u(x,0) = \sin(2\pi x/L)$ y $\partial_t u(x,0) = 0$.



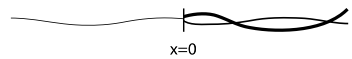
Indicación: Si n y m son enteros, entonces:
$\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L})\cos(\frac{m\pi}{L}) = 0$
$\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L})\sin(\frac{m\pi}{L}) = \frac{L}{2}\delta_{nm}$
$\int_0^L \cos(\frac{n\pi}{L})\cos(\frac{m\pi}{L}) = \frac{L}{2}\delta_{nm}$

Problema 2
Considere 3 cuerdas de distinta densidad $(\rho_I, \rho_{II}, \rho_{III})$ que se unen en $x = 0$. Por la cuerda I se envia una onda plana. Esta se refleja en la cuerda I y se transmite a las otras dos cuerdas (II y III). Usando la continuidad de la perturbación en $x = 0$, i.e. $u_I(0,t) = u_{II}(0,t) = u_{III}(0,t)$ y la conservación de la energía i.e.

$$J_i = J_r + J_{t1} + J_{t2},$$

calcule los coeficientes $R = \frac{J_r}{J_i}, T_I = \frac{J_{t1}}{J_i}$ y $T_{II} = \frac{J_{t2}}{J_i}$.

Discuta el caso límite en que la densidad de la cuerda III tiende a infinito.

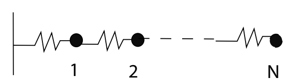


Obs:
J_i amplitud flujo de energía incidente
J_r amplitud flujo energía reflejada
J_{t1} amplitud flujo energía transmitida a cuerda I
J_{t2} amplitud flujo energía transmitida a cuerda II

Problema 3
Considere una cadena de N partículas de masa m unidas por resortes de constante k que se mueven en una recta. Un extremo está fijo y el otro libre como muestra la figura.

Determine los modos normales de oscilación para este sistema.

El analisis se simplifica extremadamente si una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas q_i utiliza el *ansatz* $\vec{q} = Re(\vec{A}e^{-i\omega t})$ con $(\vec{A})_j = ae^{\iota\phi j}$. Para determinar los modos normales debera encontrar ϕ y su relación con ω y que existen N posibles ϕ.



indicaciónes:

Le conviene introducir coordenadas ficticias q_0 y q_{N+1} para poder escribir las ecuaciones de forma única imponiendo sobre q_0 y q_{N+1} condiciones que juegan el papel de condiciones de borde.

Relaciones que pueden ser útiles si no sigue la indicacion anterior.
$\cos\phi = 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}$,
$\sin N\phi = 2\sin(N-1)\phi\cos\phi - \sin(N-2)\phi$