Sistemas Dinámicos

Control **3**: Tiempo: **2,5** horas

Prof: Felipe Barra, Aux: Maximiliano Moyano

Problema 1

Considere una cuerda infinita que tiene la siguiente propiedad: Para $x < 0$ su densidad es ρ_1 y para $x > 0$ su densidad es ρ_2 como muestra la figura. La tensión τ en toda la cuerda es la misma.

(1pt) a) Escriba la ecuación de onda para el desplazamiento vertical $\mu(x,t)$ en cada medio (i.e. los intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$) indicando explicitamente el valor de la velocidad de la onda en cada medio.

(2 pts) b) Escriba una solución de ondas planas (general) que represente la siguiente situación: Cada punto de la cuerda se mueve con frecuencia ω y en el medio "uno" (i.e. $-\infty < x < 0$) tenemos una onda que se propaga hacia la derecha y una que se propaga hacia la izquierda y en el medio "dos" (i.e. $0 < x < \infty$) una onda que solo viaja hacia la derecha.

Escriba el numero de onda en cada medio en función de los datos del problema.

(2 pts) c) Deduzca (y explique) las dos condiciones de borde que se deben satisfacer en $x = 0$.

(2 pts) d) Suponga que la amplitud de la onda que viaja hacia la derecha en el medio uno es 1. En la notación de clases $A_+ = 1$. Calcule entonces la amplitud de la onda que viaja hacia la izquierda A_-en el medio uno y la de la que viaja a la derecha en el medio dos B_+.

Problema 2

Considere una cuerda de largo l, densidad ρ, tensión τ y extremos fijos. Resuelva la ecuación de onda para las siguientes condiciones iniciales:

(2pts) a)

$$\mu(x, t = 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{l} & 0 < x < l/2 \\ \frac{2h}{l}(l - x) & l/2 < x < l \end{cases} \tag{1}$$

(4pts) b)

$$\mu(x, t = 0) = \begin{cases} \frac{4hx}{l} & 0 < x < l/4 \\ \frac{4h}{l}(l/2 - x) & l/4 < x < l/2 \\ 0 & l/2 < x < l \end{cases} \tag{2}$$

y en ambos casos $\partial_t \mu(x, t = 0) = 0 \ \forall x$

Problema 3

En la figura se muestran dos masas iguales m separadas por una distancia $l/3$ sobre una cuerda con tensión τ y extremos fijos a distancia l. Despreciando la masa de la cuerda:

(3pts) a) Encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema

(3pts) b) Para pequeñas oscilaciones, demostrar que las frecuencias naturales de oscilación del sistema son $\omega_1 = \sqrt{\frac{3\tau}{ml}}$ y $\omega_2 = \sqrt{\frac{9\tau}{ml}}$