

Sistemas Dinámicos

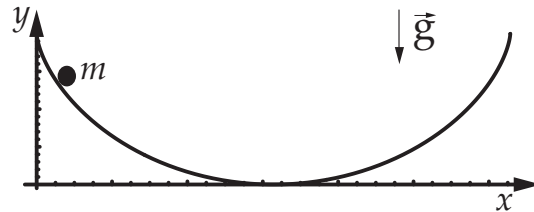
Control 1

Profs: Felipe Barra y René Rojas

Tiempo: 3 horas

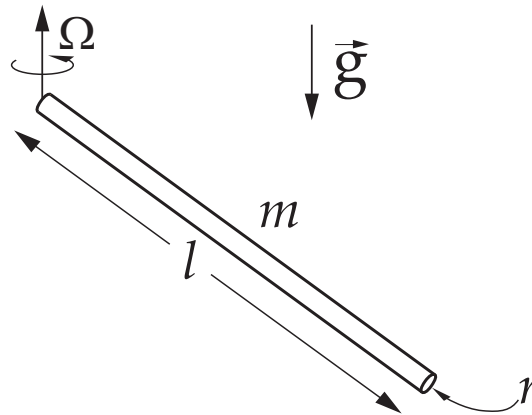
Problema 1: Mecánica de Lagrange

Una partícula puntual de masa m se mueve en la curva plana descrita por $x = a(\theta - \sin \theta)$ e $y = a(1 + \cos \theta)$ con $0 < \theta < 2\pi$. Esta curva se llama cicloide. Muestre que el movimiento de la partícula en presencia de la gravedad es un movimiento armónico simple ¿cuál es el período de oscilación? Para ello le resultará útil considerar el cambio de variable $u = \cos(\theta/2)$.



Problema 2 : Sólido Rígido

Una barra cilíndrica de masa m , largo l y radio r , tiene uno de sus extremos unido a un mecanismo que le impone una velocidad angular constante Ω en la dirección vertical. Su otro extremo queda libre para pendular. Calcule los momentos de inercia de la barra y escriba el lagrangiano del sistema. Encuentre los ángulos de equilibrio y determine su estabilidad.



Problema 3 : Multiplicadores de Lagrange

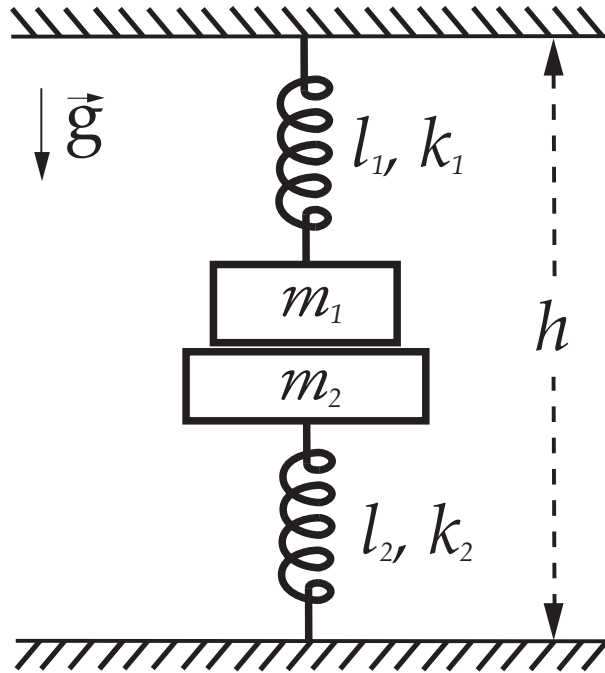
Considere el sistema descrito en la figura, que consiste de dos masas m_1 y m_2 , unidas a dos resortes verticales de constantes elásticas k_1 y k_2 y largos naturales l_1 y l_2 respectivamente. El primer resorte está sujeto al techo y el segundo al suelo. Calcule la fuerza que se ejercen los cuerpos entre sí si imponemos la restricción de que se muevan juntos.

¿En qué caso se anula esta fuerza?

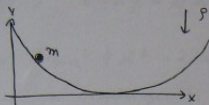
Analice en particular los casos en que

a) $l_1 + l_2 = h$, $m_1 = m_2$ y $k_1 \neq k_2$

b) $l_1 + l_2 = h$, $m_1 = m_2$ y $k_1 = k_2$



Pauta Prepruntal
Control 1 F121B/07



partícula m se mueve en la cidoide.

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$y = a(1 + \cos \theta)$$

- a) Mostrar que m , se mueve en un MAS.
b) Encontrar su período de oscilación.

Escribimos el Lagrangiano de la partícula

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (1)$$

Cambiamos a una variable independiente

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{a}(\dot{\theta} - \cos \theta \dot{\theta})^2 + a^2 (-\sin \theta \dot{\theta})^2) - m g a (1 + \cos \theta)$$

$$(2) \quad L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta} \right] - m g a - m g a \cos \theta$$

Usamos el hint: $u = \cos \frac{\theta}{2} \quad (3)$

$$\ddot{u} = -\sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \ddot{\theta}$$

Ademas de que

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} \end{aligned}} \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{1 - \cos \theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right] - m g a \left(\frac{1 + \cos \theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

(4) $\Rightarrow$

$$L = 2 m a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 m g a \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \text{Y como } \left. \begin{aligned} u^2 &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ 2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 4 \dot{u}^2 \end{aligned} \right\} (5)$$

$$L = 2ma^2 4\dot{u}^2 - 2mpa u^2 \quad (6)$$

Como un escalamiento lineal no afecta las Ecs de mov. $\Rightarrow$

$$L = 4ma^2 \dot{u}^2 - mpa u^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (8ma^2 \dot{u}) + 2mpa u = 0 \quad (7)$$

$$8ma^2 \ddot{u} + 2mpa u = 0 \quad /$$

$$4a \ddot{u} + 8u = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{u} + \frac{2}{4a} u = 0$$

$\Rightarrow$ Ecu del MAS.

$\rightarrow$ periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{2}} \quad (9)$$

Puntaje

Extra 0,5 $\rightarrow$ no depende de la amplitud !!!
En aprox exacta !!

- 1 ~~1,5~~ $\rightarrow$ Ecuación correcta del MAS
1 ~~1,5~~ $\rightarrow$ Periodo de osc. correcto
1,5 $\rightarrow$ uso correcto del hint.
1 $\rightarrow$ Lagrangiano del sistema
1,5 $\rightarrow$ Ecs de mov.

+ 0,5 $\rightarrow$ @

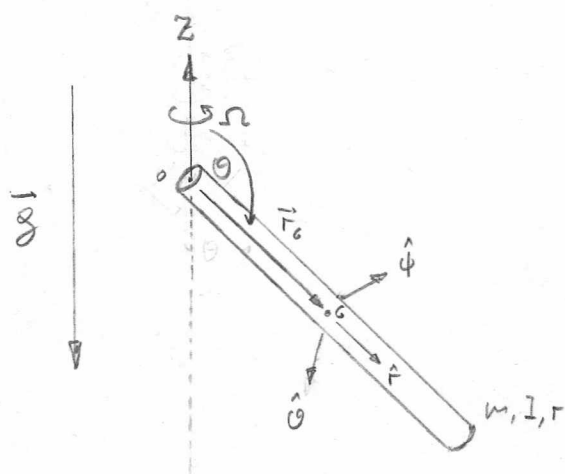
- 0,3 $\rightarrow$ Mechanics

- 0,5 $\rightarrow$ Concept

SEMESTRE: Primavera 2007

PROFESOR: Felipe Barra

AUXILIARES: Ignacio Ortega y Maximiliano Salinger

P1/ Prueba Control N°1P2/ Sólido Rígido

Usamos el sistema de referencia que muestra la figura, con el eje z en dirección vertical apuntando hacia arriba.

Consideremos las coordenadas esféricas del centro de masa de la barra: $\vec{r}_0(r_0, \theta, \phi)$. Como la barra no puede rotar sobre su propio eje (Ángulo de Euler: $\psi = 0$) no necesitamos más coordenadas.

Como el sólido es rígido, $r_0 = \frac{1}{2}l$, y además, $\dot{\phi} = \Omega$. Así que el sistema tiene un solo grado de libertad: el ángulo θ .

• Energía Cinética de Traslación:

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{2}l\hat{r} \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{2}l(\dot{\theta}\hat{\theta} + \Omega\sin(\theta)\hat{\phi})$$

$$T_{tr} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_0\|^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}l\right)^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2(\theta))$$

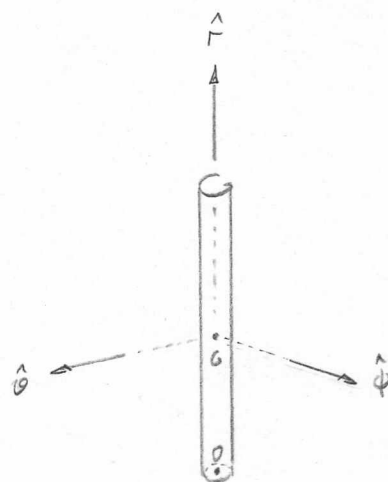
• Energía Cinética de Rotación:

$$T_{rt} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \cdot \mathbb{I}^{(c)} \cdot \vec{\omega}$$

Es claro que $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ es una base de ejes principales solidarios del cilindro.

Por simetría, hay dos momentos de inercia iguales.

$$T_{rt} = \frac{1}{2}(I_1\omega_{\theta}^2 + I_1\omega_{\phi}^2 + I_3\omega_r^2)$$



$$\mathbb{I}^{(c)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \hat{\theta} & \hat{\phi} & \hat{r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \\ \hat{r} \end{matrix} & \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

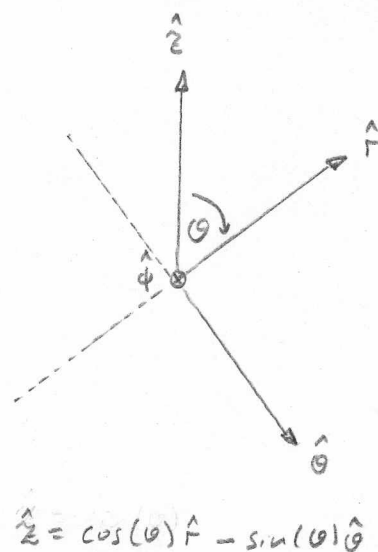
$$\vec{\omega} = \Omega \hat{z} + \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$= \Omega (\cos(\theta) \hat{r} - \sin(\theta) \hat{\theta}) + \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_1 (\Omega^2 \sin^2(\theta) + \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta)$$

Definiendo $I_0 = I_1 (\frac{1}{2} I) + I_1$

$$T = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta)$$



• Energía Potencial:

$$U = m g z = \frac{1}{2} m g l \cos(\theta)$$

• Lagrangeano:

$$L = T - U = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} m g l \cos(\theta)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_0 \dot{\theta} \quad \frac{dp_\theta}{dt} = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (I_0 - I_3) \Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{1}{2} m g l \sin(\theta)$$

Ecuación de Lagrange: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$I_0 \ddot{\theta} + (I_3 - I_0) \Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{1}{2} m g l \sin(\theta) = 0$$

• Hamiltoniano:

$$H = p_\theta \dot{\theta} - L = I_0 \dot{\theta}^2 - (T - U) = I_0 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2(\theta)) - I_0 \Omega^2 \sin^2(\theta) - I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta) - (T - U)$$

$$= 2T - T + U - I_0 \Omega^2 \sin^2(\theta) - I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta) = E - (I_0 \Omega^2 \sin^2(\theta) + I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta)) \neq E$$

$$H = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{2} m g l \cos(\theta)$$

• Potencial Efectivo: $U^*(\theta) = -\frac{1}{2} (I_0 \Omega^2 \sin^2(\theta) + I_3 \Omega^2 \cos^2(\theta)) + m g l \cos(\theta)$

$$\frac{dU^*}{d\theta} = (I_3 - I_0) \Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{1}{2} m g l \sin(\theta)$$

$$\frac{d^2 U^*}{d\theta^2} = (I_3 - I_0) \Omega^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} m g l \cos(\theta) = (I_3 - I_0) \Omega^2 (2 \cos^2(\theta) - 1) - \frac{1}{2} m g l \cos(\theta)$$

H es conservado:

(3)

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow I_0 \ddot{\theta} + \frac{dU^*}{d\theta} = 0 \quad \text{La misma ecuación del movimiento}$$

• Equilibrio Relativo: $\frac{dU^*}{d\theta} = 0 \Rightarrow (I_1 - I_0) \Omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{1}{2} \omega g l \sin(\theta) = 0$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = 0 \vee (I_1 - I_0) \Omega^2 \cos(\theta) = \frac{1}{2} \omega g l$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \theta = 0 \\ \text{(extremo superior)} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \theta = \pi \\ \text{(extremo inferior)} \end{matrix} \vee \cos(\theta) = \frac{\omega g l}{2(I_1 - I_0) \Omega^2} \rightarrow \text{Requiere}$$

• Estabilidad:

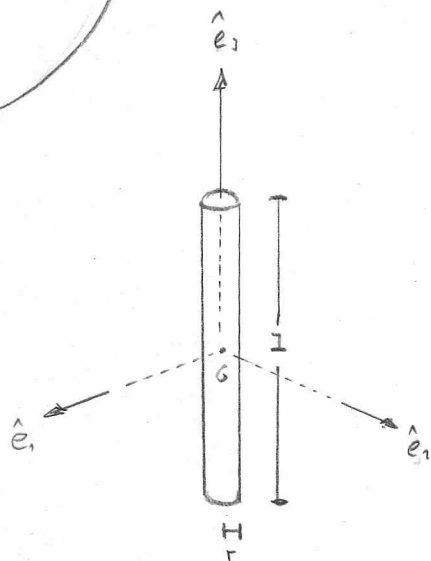
$$\frac{d^2 U}{d\theta^2}(\theta) = (I_1 - I_0) \Omega^2 - \frac{1}{2} \omega g l > 0 \Rightarrow (I_0 - I_1) \Omega^2 < -\frac{1}{2} \omega g l$$

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2}(\pi) = (I_1 - I_0) \Omega^2 + \frac{1}{2} \omega g l > 0 \Rightarrow (I_0 - I_1) \Omega^2 < \frac{1}{2} \omega g l$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{d\theta^2}(\arccos(\frac{\omega g l}{2(I_1 - I_0) \Omega^2})) &= (I_1 - I_0) \Omega^2 \left(2 \left(\frac{\omega g l}{2(I_1 - I_0) \Omega^2} \right)^2 - 1 \right) - \frac{(\omega g l)^2}{4(I_1 - I_0) \Omega^2} \\ &= \frac{(2(I_1 - I_0) \Omega^2)^2 - (\omega g l)^2}{4(I_0 - I_1) \Omega^2} > 0 \Rightarrow (I_0 - I_1) \Omega^2 > \frac{1}{2} \omega g l \vee (I_0 - I_1) \Omega^2 < -\frac{1}{2} \omega g l \end{aligned}$$

Reservando:	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta = \arccos\left(\frac{\omega g l}{2(I_1 - I_0) \Omega^2}\right)$
$(I_0 - I_1) \Omega^2 < -\frac{1}{2} \omega g l$	Estable	Estable	Estable
$-\frac{1}{2} \omega g l < (I_0 - I_1) \Omega^2 < \frac{1}{2} \omega g l$	Inestable	Estable	No existe
$(I_0 - I_1) \Omega^2 > \frac{1}{2} \omega g l$	Inestable	Inestable	Estable

Uede entonces calcular los momentos principales de inercia, en torno al centro de masa:



$$I_{ij} = \iiint_C \rho(\mathbf{r}) (\|\mathbf{r}\|^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dV$$

Densidad Constante:

$$\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 L}$$

$$I_1 = \iiint_C \rho_0 (y^2 + z^2) dV$$

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho_0 (r^2 \sin^2(\phi) + z^2) \rho dz d\phi dr = \rho_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \sin^2(\phi) + r^2 z^2 dz d\phi dr$$

$$= \rho_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} L r^2 \sin^2(\phi) + \frac{1}{12} L^3 r^2 d\phi dr = \rho_0 \int_0^r \pi r^2 + \frac{\pi}{6} L^3 r^2 dr$$

$$= \frac{m}{\pi r^2 L} \left(\frac{1}{4} L r^4 + \frac{\pi}{12} L^3 r^2 \right) = \frac{m r^2}{4} + \frac{m L^2}{12}$$

Por simetría, $I_2 = I_1 = \frac{m r^2}{4} + \frac{m L^2}{12}$

$$I_0 = m \left(\frac{1}{2} L \right)^2 + I_1 = \frac{m r^2}{4} + \frac{m L^2}{3}$$

$$I_3 = \iiint_C \rho_0 (x^2 + y^2) dV = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho_0 r^2 \rho dz d\phi dr = 2\pi L \rho_0 \int_0^r r^3 dr$$

$$= 2\pi L \frac{m}{\pi r^2 L} \frac{r^4}{4} = \frac{m r^2}{2}$$

$$I_0 - I_1 = m \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{4} \right)$$

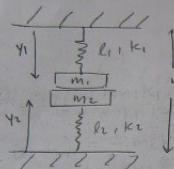
Asignación de Puntaje

- | | |
|---|-----|
| • Calcular los momentos principales de inercia. | 2.0 |
| • Encontrar el Lagrangeano | 1.5 |
| • Encontrar los equilibrios relativos | 1.5 |
| • Analizar la estabilidad de los equilibrios | 1.0 |
| • Punto base | 1.0 |
| • Total | 7.0 |

Pauta Problema 3

Control 4 71213-2007.

F. Barra



¿Fuerza que se ejercen las masas?

¿Caso en que se anulan?

Casos a) y b)

para este sistema

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$$

$$V = m_1 g (h - y_1) + m_2 g (y_2) + \frac{1}{2} k_1 (y_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - l_2)^2$$

$$L = T - V \quad (\text{no es necesario expresar el corcho})$$

Como hemos soltado la restricción

$$y_1 + y_2 = h$$

entonces ponemos un multiplicador de Lagrange: y las ecuaciones de EL quedan:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \lambda \frac{\partial (y_1 + y_2)}{\partial q_\sigma}$$

($\sigma = 1, 2$ índices para y_1 e y_2)

Entonces,

Ecuaciones:

Para y_1)

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(m_1 \dot{y}_1)}_{m_1 \ddot{y}_1} + m_1 g - K_1 (y_1 - l_1) = \lambda$$

Para y_2)

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(m_2 \dot{y}_2)}_{m_2 \ddot{y}_2} + m_2 g - K_2 (y_2 - l_2) = \lambda$$

Pero
la estiración

~~Si se elige el eje hacia abajo como positivo~~

$$y_2 = -y_1 + h$$
$$\ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1$$

Si reemplazo en la 2da ecu. y después cancelo λ

$$-m_2 \ddot{y}_1 + m_2 g - K_2 (h - y_1 - l_2) = \lambda$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{K_2 (-h + y_1 + l_2) + m_2 g - \lambda}{m_2}$$

$$m_1 \left(\frac{K_2 (-h + y_1 + l_2) + \cancel{g} - \lambda}{m_2} - \cancel{m_1 g} - K_1 (y_1 - l_1) \right) = \lambda$$

$$\frac{m_1}{m_2} K_2 (y_1 - h + l_2) - K_1 (y_1 - l_1) = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \lambda$$

$$\lambda = \frac{\frac{m_1}{m_2} (K_2) (y_1 - h + l_2) - K_1 (y_1 - l_1)}{\left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)}$$

Fuerza normal entre las masas

$\lambda = 1$ se anula cuando

✓ con esto basta para este pedazo

$$\frac{m_1}{m_2} (k_2 (y_1 - h) + l_2) = K_1 (y_1 - l_1)$$

$$m_1 k_2 (y_1 - h) + m_1 k_2 l_2 = m_2 K_1 (y_1 - l_1)$$

$$m_1 k_2 y_1 - \underbrace{m_1 k_2 h + m_1 k_2 l_2}_{+ m_1 k_2 (l_2 - h)} = m_2 K_1 y_1 - m_2 K_1 l_1$$

$$\Rightarrow y_1 (m_1 k_2 - m_2 K_1) + m_1 k_2 (l_2 - h) = -m_2 K_1 l_1$$

En general es $N=0$

cuando

$$y_1 = \frac{m_1 k_2 (h - l_2) - m_2 K_1 l_1}{(m_1 k_2 - m_2 K_1)}$$

pto de
Fuerza
nula

casos

si

$l_1 + l_2 = h$, la condición para que λ se anule es

$$y_1 (m_1 k_2 - m_2 K_1) = (m_1 k_2 - m_2 K_1) l_1 \quad \boxed{y_1 = l_1 \text{ (} m_1 k_2 - m_2 K_1 \neq 0 \text{)}}$$

si a) $k_1 + k_2$ entonces N se anula

$$\text{si } m_1 = m_2 \text{ cuando } \frac{m_1 k_2}{m} = \frac{m_2 K_1}{m} \Rightarrow K_2 = K_1$$

(buscamos caso en que siempre anule)

en este caso no podemos fijar los parámetros

rp N sea 0 el tiempo 0

- en este mismo caso

$$\boxed{y_1(N=0) = l_1}$$

es importante

$$(e \text{ } y_2 = l_2)$$

En el caso b) con $K_1 = K_2$
 siempre se anula la fuerza
 lo que es claro de la
 ecc. obtenida para el caso
 anterior



- a) N es cero cuando
 los resortes están en su longitud natural //
- b) $N = 0 \quad \forall y_1 //$

Puntaje

0,5 ~~1.5~~ la planteamos en coordenadas adecuadas.

2.0 Ecuaciones con multiplicadores correctos.

1,5 ^{1.0} Imponer la restricción y calcular λ ,
 (bien) 0,5

1 2.0 Analisis $N=0$

→ 0,5 Condición de anulación general
 → ~~0,5~~ caso a)
 → ~~0,5~~ caso b)

↓ si la tenemos
 en los
 casos
 esta bien tb
 y se dará
 1 pto a
 cada
 caso
 1.