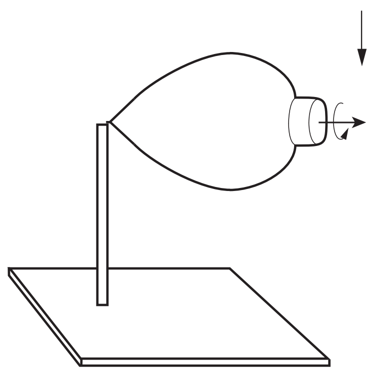
Sistemas Dinámicos

Control 2

Profs: Felipe Barra y René Rojas
Tiempo: 3 horas

Problema 1: Trompo

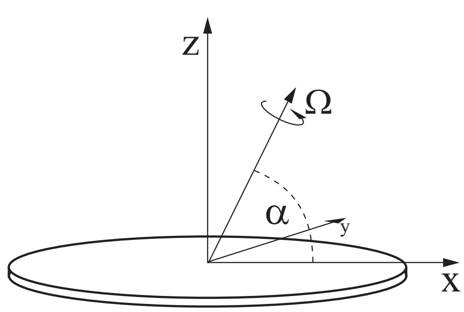
Un trompo con momentos de inercia I_1 e I_2, masa m y centro de gravedad ubicado a una distancia h del punto fijo, es puesto en movimiento con su eje de simetría en posición horizontal. Encuentre la condición para que el eje de simetría del trompo se mantenga horizontal.



Problema 2 : Ecuaciones de Euler

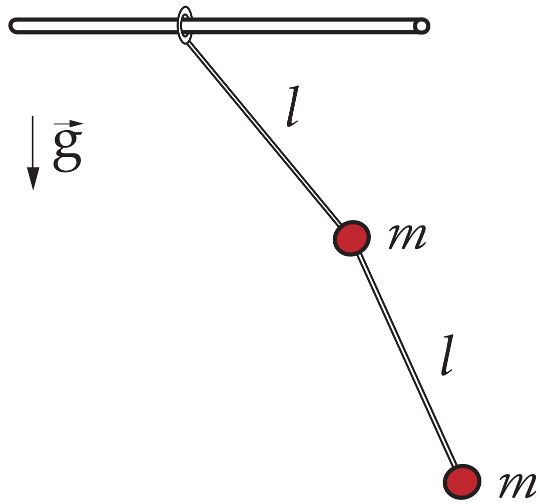
Considere un plato delgado con momentos de inercia I_1, I_2 e I_3 con respecto a los ejes principales de inercia $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ respectivamente, tal que $I_2 > I_1$ e $I_3 = I_1 + I_2$. El origen del sistema está localizado en el centro de masa del plato. Al instante $t = 0$ comienza a rotar con velocidad ángular Ω en torno a un eje inclinado en un ángulo α desde el plano del plato y perpendicular al eje $\hat{y}$.

Si $I_1/I_2 = \cos(2\alpha)$, muestre que al tiempo t la velocidad ángular en torno al eje $\hat{y}$ es: $\omega_2(t) = \Omega \cos\alpha \tanh(\Omega\, t \sin\alpha)$.



Problema 3 : Pequeñas Oscilaciones

Un aro de masa $2m$ puede deslizar sin roce por un cable horizontal. Unido al aro, está un péndulo doble de masas iguales m y largos iguales l.

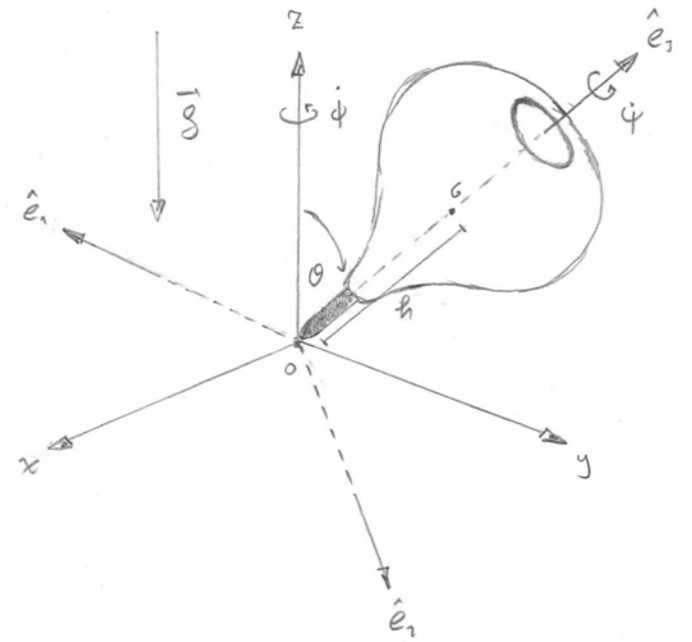


a) Escriba el Lagrangiano del sistema.
b) Obtenga el lagrangiano aproximado de pequeñas oscilaciones.
c) Encuentre las matrices **M** y **K**.
d) Calcule las frecuencias propias del sistema.
e) Determine los modos normales y descríbalos cualitativamente .

FI21B SISTEMAS DINÁMICOS
Semestre Primavera 2007
Profesores: Felipe Barra, René Rojas
Auxiliares: Maximiliano Salinger, Ignacio Ortega,
Maite Cerda, Viviana Guzmán

PAUTA CONTROL N°2

P1/ Trompo



$$\mathbb{I}^{(O)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

Matriz de Inercia respecto a la punta fija (O) del trompo, escrita en la base de ejes principales $\{\hat e_1, \hat e_2, \hat e_3\}$

Se pregunta bajo qué condiciones, el ángulo de Euler $\theta = \frac{\pi}{2}$ es equilibrio relativo estable.

Lagrangeano del trompo:

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_2 (\dot\phi \cos(\theta) + \dot\psi)^2 - mgh\cos(\theta) = T - U$$

Como el Lagrangeano no depende explícitamente de ϕ, ψ ni t, los momentos generalizados asociados y el Hamiltoniano son cantidades conservadas:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_2(\dot\phi\cos(\theta) + \dot\psi) = I_2 \omega_3 = \ell_3 \quad (\text{constante})$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1 \dot\phi \sin^2(\theta) + I_2(\dot\phi\cos(\theta) + \dot\psi)\cos(\theta) = I_1 \dot\phi \sin^2(\theta) - \ell_3 \cos(\theta) = \ell_z \quad (\text{constante})$$

$$\Rightarrow \dot\phi = \frac{\ell_z - \ell_3\cos(\theta)}{I_1 \sin^2(\theta)}$$

$$H = \frac{1}{2} I_1 (\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2(\theta)) + \frac{1}{2} I_2 (\dot\phi^2 \cos(\theta) + \dot\psi)^2 + mgh\cos(\theta) = E \quad (\text{constante})$$

Al reemplazar $\dot{\phi}$ obtenemos:

$$H = \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(\ell_z - \ell_3\cos(\theta))^2}{2I_1\sin^2(\theta)} + \frac{\ell_3^2}{2I_2} + mgh\cos(\theta) = E$$

Potencial Efectivo:

$$U^*(\theta) = \frac{(\ell_z - \ell_3\cos(\theta))^2}{2I_1\sin^2(\theta)} + \frac{\ell_3^2}{2I_2} + mgh\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + U^*(\theta) = E$$

Ecuación del Movimiento:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow I_1\ddot{\theta} + \frac{dU^*}{d\theta} = 0$$

$$\frac{dU^*}{d\theta} = \frac{\ell_3(\ell_z - \ell_3\cos(\theta))}{I_1\sin(\theta)} - \frac{(\ell_z - \ell_3\cos(\theta))^2\cos(\theta)}{I_1\sin^3(\theta)} - mgh\sin(\theta)$$

Como sabemos, un ángulo θ_0 es equilibrio relativo si $\frac{dU^*}{d\theta}(\theta_0) = 0$

Idea: ¿Para qué valores de ℓ_3, ℓ_z se tiene que $\frac{dU^*}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$?

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\frac{dU^*}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\ell_3\ell_z}{I_1} - mgh = 0 \Rightarrow \ell_3\ell_z = I_1 mgh \quad //$$

También se puede hacer este estudio a partir de las condiciones iniciales: $\bar{q}_0, \dot{\bar{q}}_0$
Dadas las simetrías, se pueden escoger los ejes cartesianos y principales para que los Ángulos de Euler ϕ y ψ sean inicialmente cero. Además, como nos interesa la dinámica cerca de la posición horizontal, se puede escoger por comodidad que inicialmente el trompo está en dicha posición.

$$t=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2},\ \phi = 0,\ \psi = 0,\ \dot{\theta} = \dot{\theta}_0,\ \dot{\phi} = \dot{\phi}_0,\ \dot{\psi} = \dot{\psi}_0$$

Lo importante es justificar estos supuestos.
Como ℓ_ϕ y ℓ_ψ son conservados:

$$\ell_\psi = \ell_\psi(t=0) = I_2\dot{\psi}_0 \qquad \ell_\phi = \ell_\phi(t=0) = I_1\dot{\phi}_0$$

Luego, $$\frac{dU^*}{d\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = I_2\dot{\phi}_0\dot{\psi}_0 - mgh = 0 \Rightarrow \dot{\phi}_0\dot{\psi}_0 = \frac{mgh}{I_2}$$

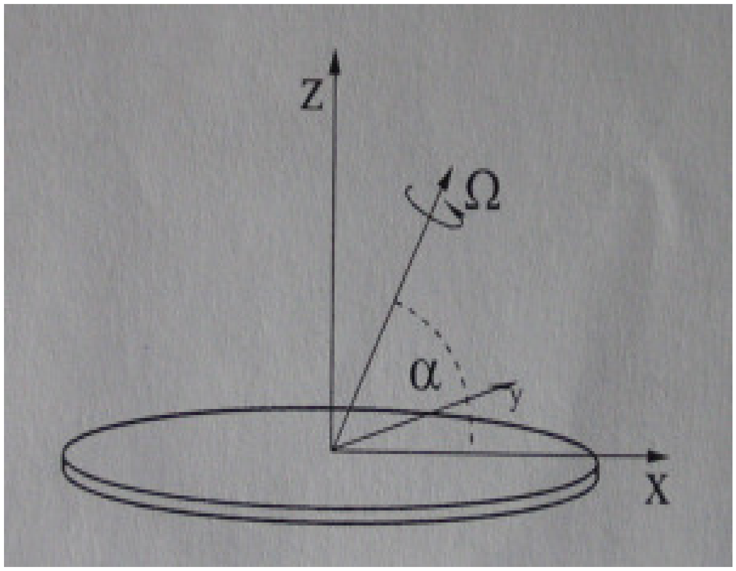
A pesar que no se solicita analizar la estabilidad del equilibrio, lo haremos de todos modos:

$$\frac{d^2U^+}{d\theta^2} = \frac{l_3^2}{I_1} - 3\frac{l_3(l_2 - l_3\cos(\theta))\cos(\theta)}{I_1\sin^2(\theta)} + 3\frac{(l_2 - l_3\cos(\theta))^2\cos^2(\theta)}{I_1\sin^4(\theta)} + \frac{(l_2 - l_3\cos(\theta))^2}{I_1\sin^2(\theta)} - mgh\cos(\theta)$$

Luego, $\frac{d^2U^+}{d\theta^2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{l_3^2}{I_1} + \frac{l_2^2}{I_1} \geq 0$

Así, si $\theta = \frac{\pi}{2}$ es equilibrio relativo, siempre será estable. //

Pauta Pregunta 2, Control 2, Sistemas Dinámicos, 2007



El sistema viene caracterizao por los momentos de inercia: I_1, I_2, I_3.
Se tienen las relaciones siguientes entre los momentos antesdichos:

$$I_2 > I_1$$
$$I_3 = I_1 + I_2$$
$$\frac{I_1}{I_2} = \cos(2\,\alpha)$$

El sistema tiene condiciones iniciales, en $t = 0$, como se vé en la figura.

Consideremos las ecuaciones de Euler, esto es:

$$I_1 \frac{d}{dt}(\omega_1) + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \tag{1}$$

$$I_2 \frac{d}{dt}(\omega_2) + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \tag{2}$$

$$I_3 \frac{d}{dt}(\omega_3) + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0 \tag{3}$$

Multiplicando por ω_1, ω_2 *y* ω_3 respectivamente las ecuaciones (1), (2) y (3); y usando las relaciones de los momentos de inercia que tenemos: las ecuaciones toman la forma:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_1^2\right) + \omega_1\omega_2\omega_3 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_2^2\right) - \omega_1\omega_2\omega_3 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{I_3}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_3^2\right) + \left(I_2 - I_1\right)\omega_1\omega_2\omega_3 = 0 \tag{6}$$

Sumando (4) y (5) obtenemos la relación:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = cte$$

Podemos evaluar esta expresión en el instante inicial, puesto que

$$\omega_1(0) = \Omega\cdot cos(\alpha) \text{ y } \omega_2(0) = 0$$

Luego tenemos que:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \Omega^2 cos^2(\alpha) \tag{7}$$

de donde despejamos ω_2:

$$\omega_2 = \Omega\cos(\alpha)\sqrt{1 - \frac{\omega_2}{\Omega^2\cos^2(\alpha)}} \tag{8}$$

Ahora si multiplicamos (4) po I_1 y (5) por I_2 y las sumamos a (6) obtenemos que:

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = cte$$

Por lo que podemos evaluar en $t = 0$ igual que para (7) obteniendo:

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = I_1\Omega^2\cos(\alpha) + I_3\Omega^2\sin(\alpha)$$

(9)

Reemplazando las relaciones entre los momentos y usando (7) u (8) despejamos ω_3

$$\omega_3 = \sqrt{\Omega^2 \sin^2(\alpha) - \frac{I_2 - I_1}{I_1 + I_2}\omega_2^2}$$

(10)

Ahora vemos que:

$$\frac{I_2 - I_1}{I_1 + I_2} = \frac{1 - \frac{I_1}{I_2}}{1 + \frac{I_1}{I_2}} = \frac{1 - \cos(2\,\alpha)}{1 + \cos(2\,\alpha)} = \frac{\sin^2(2\,\alpha)}{\cos^2(2\,\alpha)}$$

Con lo que escribimos finalmente:

$$\omega_3 = \Omega \sin(\alpha)\sqrt{1 - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2 \cos^2(\alpha)}}$$

(11)

Con esto podemos reescribir la ecuación (2) como sigue:

$$\frac{d}{d\,t}(\omega_2) = \Omega^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2 \cos^2(\alpha)}\right)$$

(12)

ahora integramos esta ecuación usando el cambio de variables $u = \frac{\omega_2}{\Omega \cos(\alpha)}$:

$$\int_0^u \frac{1}{1 - u^2}\, du = \Omega\, t\, sin(\alpha)$$

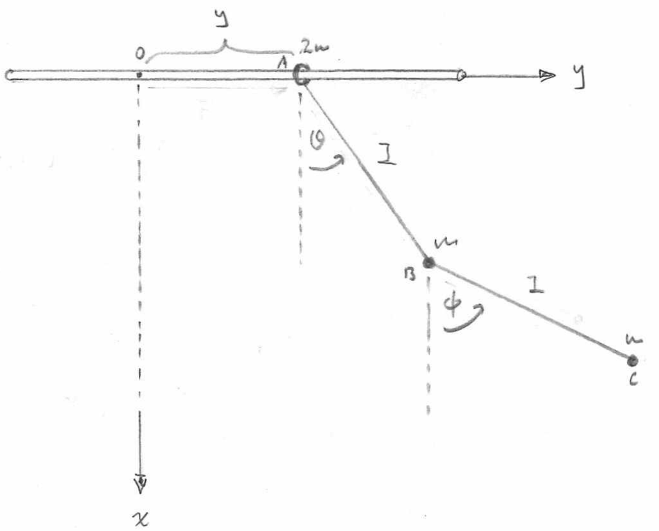
$$\operatorname{arctanh}(u) = \Omega\, t\, sin(\alpha)$$

$$u = \tanh(\Omega\, t\, sin(\alpha))$$

(13)

Nota: también es válido ver que la solución propuesta satisface la ecuación diferencial (11), en lugar de integrarla.

P3/ Pequeñas Oscilaciones



Claramente este sistema tiene tres grados de libertad:

$$\vec{q} = (y, \theta, \phi)$$

a) Definimos posiciones relativas:

$\vec{r}_A = y\hat{y}$ $\quad$ $\vec{r}_B' = l\,(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y})$ $\quad$ $\vec{r}_C'' = l\,(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y})$

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_B'$ $\quad$ $\vec{r}_C = \vec{r}_A + \vec{r}_B' + \vec{r}_C''$

$\vec{v}_A = \dot{y}\hat{y}$ $\quad$ $\vec{v}_B' = l\dot{\theta}(-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y})$ $\quad$ $\vec{v}_C'' = l\dot{\theta}(-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y})$

Energía Cinética:

$$T_A = \frac{1}{2}(2m)\|\vec{v}_A\|^2 = m\dot{y}^2$$

$$T_B = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_B\|^2 = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_A + \vec{v}_B'\|^2 = \frac{1}{2}m\left(\|\vec{v}_A\|^2 + \|\vec{v}_B'\|^2 + 2\vec{v}_A\cdot\vec{v}_B'\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta)\right)$$

$$T_C = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_C\|^2 = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_A + \vec{v}_B' + \vec{v}_C''\|^2 = \frac{1}{2}m\left(\|\vec{v}_A\|^2 + \|\vec{v}_B'\|^2 + \|\vec{v}_C''\|^2 + 2\vec{v}_A\cdot\vec{v}_B' + 2\vec{v}_A\cdot\vec{v}_C'' + 2\vec{v}_B'\cdot\vec{v}_C''\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta) + 2l\dot{y}\dot{\phi}\cos(\phi) + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\left(\sin(\theta)\sin(\phi) + \cos(\theta)\cos(\phi)\right)\right)$$

$$T = T_A + T_B + T_C$$

Energía Potencial:

$$U = \cancel{U_A}^{\,0} + U_B + U_C = -mgl\cos(\theta) - mgl\left(\cos(\theta) + \cos(\phi)\right) = -mgl\left(2\cos(\theta) + \cos(\phi)\right)$$

Lagrangeano: $\quad L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}m\left(4\dot{y}^2 + 2l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 4l\dot{y}\dot{\theta}\cos(\theta) + 2l\dot{y}\dot{\phi}\cos(\phi) + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right) - mgl\left(2\cos(\theta) + \cos(\phi)\right)$$

b)

$$\nabla U = mgl\begin{pmatrix}0\\ 2\sin(\theta)\\ \sin(\phi)\end{pmatrix} \qquad HU = mgl\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & \cos(\phi)\end{bmatrix}$$

Afirmación: $\bar{q}_0 = (0,0,0) = \vec{0}$ es punto de equilibrio estable:

En efecto, $\nabla U(\vec{0}) = \vec{0}$, $\quad HU(\vec{0}) = mgl\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbb{V}$ semidefinida positiva, pues es diagonal con elementos positivos y nulos.

Taylor de segundo orden: $\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \quad (\alpha \approx 0)$

$$U \approx -mgl\left(2\left(1-\tfrac{1}{2}\theta^2\right) + \left(1 - \tfrac{1}{2}\phi^2\right)\right) = mgl\left(-3 + \theta^2 + \tfrac{1}{2}\phi^2\right)$$

Aproximamos la energía cinética suponiendo $\bar{q} \approx 0$:

$$T \approx \tfrac{1}{2}m\left(4\dot{y}^2 + 2l\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 4l\dot{y}\dot{\theta} + 2l\dot{y}\dot{\phi} + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\right)$$

Lagrangeano Cuadratizado:

$$L \approx L^{[2]} = \tfrac{1}{2}m\left(4\dot{y}^2 + 2l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 4l\dot{y}\dot{\theta} + 2l\dot{y}\dot{\theta} + 2l^2\dot{\theta}\dot{\phi}\right) + mgl\left(3 - \theta^2 - \tfrac{1}{2}\phi^2\right)$$

---

c) Como ya sabemos, las aproximaciones de la energía cinética y potencial son formas cuadráticas: $T \approx \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}^T \cdot \mathbb{T} \cdot \dot{\bar{q}}$, $U \approx U_0 + \frac{1}{2}\bar{q}^T \cdot \mathbb{V} \cdot \bar{q}$; donde:

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix}4m & 2ml & ml\\ 2ml & 2ml^2 & ml^2\\ ml & ml^2 & ml^2\end{bmatrix} \qquad \mathbb{V} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2mgl & 0\\ 0 & 0 & mgl\end{bmatrix}$$

Ecuación del Movimiento: $\mathbb{T}\cdot\ddot{\bar{q}} + \mathbb{V}\cdot\bar{q} = \vec{0}$

d) Frecuencias Propias: $\det(\mathbb{V} - \omega^2\mathbb{T}) = 0$

$$\det\begin{pmatrix}-4m\omega^2 & -2ml\omega^2 & -ml\omega^2\\ -2ml\omega^2 & 2mgl - 2ml^2\omega^2 & -ml^2\omega^2\\ -ml\omega^2 & -ml^2\omega^2 & mgl - ml^2\omega^2\end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}4\omega^2 & 2l\omega^2 & l\omega^2\\ 2l\omega^2 & 2(l^2\omega^2 - gl) & l^2\omega^2\\ l\omega^2 & l^2\omega^2 & l^2\omega^2 - gl\end{pmatrix} = 0$$

$$4\omega^2\det\begin{pmatrix}2(gl - l^2\omega^2) & l^2\omega^2\\ l^2\omega^2 & gl - l^2\omega^2\end{pmatrix} - 2l\omega^2\det\begin{pmatrix}2l\omega^2 & l^2\omega^2\\ l\omega^2 & gl - l^2\omega^2\end{pmatrix} + l\omega^2\begin{pmatrix}2l\omega^2 & 2(gl - l^2\omega^2)\\ l\omega^2 & l^2\omega^2\end{pmatrix} = 0$$

$$4\omega^2\left(2(I^2\omega^2-gI)^2-I^4(\omega^2)^2\right)-2I\omega^2\left(2I\omega^2(I^2\omega^2-gI)-I^3(\omega^2)^2\right)+I\omega^2\left(2I^3(\omega^2)^2-2I\omega^2(I^2\omega^2-gI)\right)=0$$

$$2\omega^2\left(2(\omega^2-\tfrac{g}{I})^2-(\omega^2)^2\right)-\omega^2\left(2\omega^2(\omega^2-\tfrac{g}{I})-(\omega^2)^2\right)+\omega^2\left((\omega^2)^2-\omega^2(\omega^2-\tfrac{g}{I})\right)=0$$

$$\omega^2\left(4(\omega^2-\tfrac{g}{I})^2-3\omega^2(\omega^2-\tfrac{g}{I})\right)=0$$

$$\omega^2(\omega^2-\tfrac{g}{I})(\omega^2-4\tfrac{g}{I})=0$$

$$\omega_1^2=0\,,\quad \omega_2^2=\frac{g}{I}\,,\quad \omega_3^2=4\frac{g}{I} \quad //$$

---

d) Modos Propios: $(V-\omega^2 T)\cdot\vec{u}=\vec{0}$ $\quad \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$

$\underline{\omega_1^2=0}/$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2mg&0\\0&0&mg\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff \begin{array}{l}u_2=0\\u_3=0\end{array}\Rightarrow \vec{u}=(u_1,0,0)$$

Escogemos: $\vec{u}_1=(1,0,0)$

$\underline{\omega_2^2=\frac{g}{I}}/$

$$\begin{bmatrix}4\frac{g}{I}&2g&g\\2g&0&gI\\g&gI&0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff \begin{array}{l}2u_1+Iu_3=0\\u_1+Iu_2=0\end{array}\iff \begin{array}{l}u_3=-\frac{2}{I}u_1\\u_2=-\frac{1}{I}u_1\end{array}$$

$\vec{u}=(u_1,-\frac{1}{I}u_1,-\frac{2}{I}u_1)$ $\quad$ Escogemos $\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-I,1,2)$

$\underline{\omega_3^2=4\frac{g}{I}}/$

$$\begin{bmatrix}16\frac{g}{I}&8g&4g\\8g&6gI&4gI\\4g&4gI&3gI\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff \begin{array}{l}u_3=\frac{4}{I}u_1\\u_2=-\frac{4}{I}u_1\end{array}$$

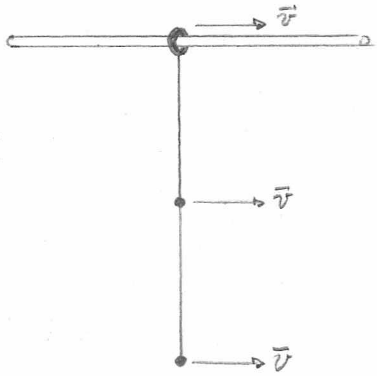
$\vec{u}=(u_1,-\frac{4}{I}u_1,\frac{4}{I}u_1)$

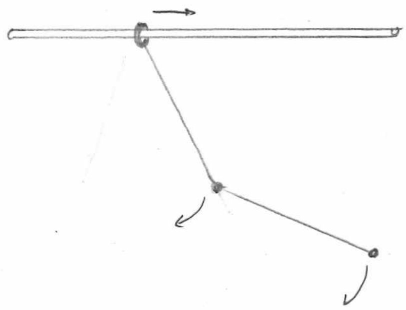
Escogemos:

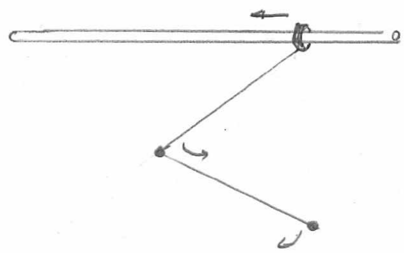
$\vec{u}_3=\frac{1}{\sqrt{33}}(I,-4,4)$

Solución General:

$$\vec{q}(t) = (a_1 t + b_1)\vec{u}_1 + (a_2 \sin(\omega_2 t) + b_2 \cos(\omega_2 t))\vec{u}_2 + (a_3 \sin(\omega_3 t) + b_3 \cos(\omega_3 t))\vec{u}_3$$







Modo 1: El sistema se mueve rígidamente con velocidad constante.

Modo 2: Las dos partículas oscilan en una misma dirección a la vez, a misma frecuencia $\sqrt{\frac{g}{l}}$. El centro de masa del sistema sólo se mueve verticalmente.

Modo 3: Las dos partículas oscilan a una misma frecuencia $2\sqrt{\frac{g}{l}}$, en direcciones opuestas. El centro de masa sólo se mueve verticalmente.

Asignación de Puntaje:

- Punto Base: 1.0
- Parte (a): 2.0
- Partes (b) y (c): 1.0
- Parte (d): 2.0
- Parte (e): 1.0

- Total: 7.0