

## Control 2 Sistemas Dinámicos FI21B

Profesores: Felipe Barra, Nicolás Mujica  
21 de Octubre 2004

Duración: 3 horas

**P1** Considere un objeto, como un libro, de momentos principales de inercia  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ , calculados respecto al centro de masa; éstos son todos distintos, de modo que  $I_1 < I_2 < I_3$ . Despreciando la gravedad, estudie la estabilidad del objeto frente a rotaciones entorno a los ejes principales.

**P2** Un trompo simétrico en presencia de gravedad con punta fija se coloca en movimiento con su eje inclinado en  $90^\circ$  respecto a la vertical. Sus momentos de inercia respecto al punto fijo son  $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}mh^2$  e  $I_3 = \frac{5}{4}mh^2$ , donde  $h$  es la distancia de la púa fija al centro de masas y  $m$  la masa del trompo. Las condiciones iniciales son  $\dot{\psi}(t=0) = \sqrt{g/h}$ , y de precesión y nutación nulas, esto es  $\dot{\phi}(t=0) = \dot{\theta}(t=0) = 0$  respectivamente.

(a) Determine los valores extremos de la inclinación del eje del trompo, esto es los valores extremos del ángulo de nutación  $\theta$ .

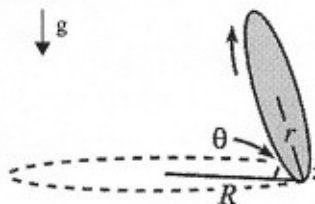
(b) Determine el valor de la velocidad angular de precesión  $\dot{\phi}$  en el punto más bajo de nutación.

**P3** Una moneda de radio  $r$  ha sido puesta en movimiento de manera tal que rueda sin resbalar en torno a un círculo de radio  $R$  y con un ángulo constante  $\theta$  respecto a la horizontal, tal como se muestra en la figura.

(a)Cuál es la frecuencia del movimiento circular del punto de contacto ?

(b) Demuestre que el movimiento es posible sólo si  $R > \frac{5}{6}r \cos \theta$ .

Indicación: Usando la condición de rodar sin resbalar escriba la velocidad angular en los ejes principales y el Lagrangiano del sistema considerando  $\theta$  como grado de libertad. Luego imponga la restricción  $\theta$  constante. Recuerde que con respecto al centro del disco  $I_1 = I_2 = mr^2/4$  e  $I_3 = mr^2/2$ .

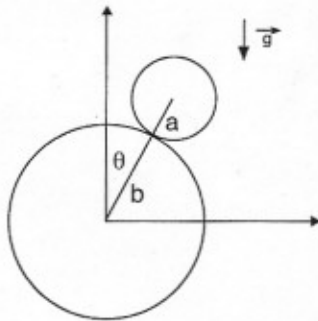


**Control 2**  
**Sistemas Dinámicos FI21B-1**

Profesor Nicolás Mujica  
Profs. auxiliares: Gustavo During y Carlos Suazo  
30 de abril 2005  
Duración: 3 horas

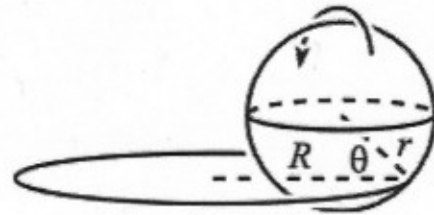
**P1. Fuerzas de constricción.** Un sólido de radio  $a$  rueda sin resbalar sobre otro sólido similar pero de radio  $b$ , el cual se encuentra fijo. Considere por ahora que el momento de inercia del sólido respecto a su eje de simetría es  $I_o$ .

- (a) Si el sólido parte desde el reposo con  $\theta = 0$  gracias a una pequeña perturbación, encuentre la fuerza de constricción que actúa sobre él en función del ángulo  $\theta$  y calcule el ángulo crítico para el cual el sólido en rotación despegue de la superficie del otro. (4 pts)
- (b) Considere ahora que el sólido puede ser una esfera ( $I_o = 2/5 Ma^2$ ), un casquete esférico ( $I_o = 2/3 Ma^2$ ) o un cilindro ( $I_o = 1/2 Ma^2$ ) y ordene los ángulos críticos correspondientes de menor a mayor. Porqué estos ángulos son diferentes entre sí? (2 pts)



**P2. Balón de Basketball sobre un aro.** En la figura se muestra un balón de Basketball de radio  $r$  que gira sin resbalar sobre un aro de radio  $R$  manteniendo un ángulo constante con la horizontal  $\theta$ . Para ello debe girar a una velocidad angular

$\Omega$  constante en torno al eje vertical fijo (eje de simetría del aro), que depende de  $\theta$ . Encuentre  $\Omega$  tal que el movimiento descrito sea de equilibrio.



**P3. Movimiento de un trompo simétrico libre.** Considere un trompo simétrico "libre", es decir sin fuerzas externas. Los momentos principales de inercia son  $I_1 = I_2 = I_o$  e  $I_3 > I_o$ . El movimiento es tal que el "spin" inicial en la dirección principal  $\hat{e}_3$  es  $\psi_o$  y la energía total  $E_o$ .

- (a) Muestre que la velocidad angular  $\omega_3$  es constante, y que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se rigen ambas por la ecuación de un oscilador armónico. (1.5 pts)
- (b) En particular muestre que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  están desfasadas en  $90^\circ$ . Que significa esto desde el sistema de ejes principales de inercia? (1.5 pts)
- (c) Usando las cantidades conservadas, cuál es el ángulo entre  $\vec{\omega}$  y  $\hat{e}_3$ ? Cuál es el ángulo entre  $\vec{\omega}$  y  $\vec{L}$ ? (2 pt)
- (d) Desde el sistema fijo en el laboratorio dibuje esquemáticamente la orientación de los vectores  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{L}$  y el de los ejes principales de inercia como también el movimiento que éstos presentan. (1 pt)