FI21B-1 SISTEMAS DINÁMICOS

Semestre Primavera 2007

PROFESOR: Felipe Barra de la Cuerda

AUXILIARES: Ignacio Ortega y Maximiliano Salinger

Clase Auxiliar Miércoles 29 de agosto

P1/ Considere el Lagrangeano: $L = \frac{1}{2}M(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)e^{\Omega t}$

¿Qué sistema físico representa?

Indique el significado de los parámetros M, ω, Ω

Encuentre y resuelva la ecuación del movimiento.

Sol.1 $$L = \frac{1}{2}M(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)e^{\Omega t}$$

Obs: (Claramente $H \neq E$ y H no es conservado)

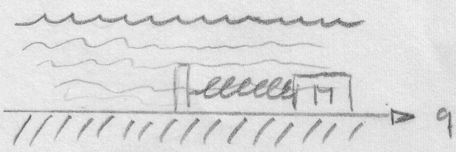
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M\dot{q}e^{\Omega t} \qquad \frac{dp}{dt} = M(\ddot{q} + \Omega\dot{q})e^{\Omega t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -M\omega^2 q e^{\Omega t}$$

Ecuación de Lagrange $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$M(\ddot{q} + \Omega\dot{q} + \omega^2 q)e^{\Omega t} = 0$$

$$\ddot{q} + \Omega\dot{q} + \omega^2 q = 0$$



Es la ecuación de un oscilador armónico en presencia de roce viscoso.

$F_{resorte} = -kx = -M\omega^2 q \Rightarrow k = M\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ frecuencia de oscilación (sin roce)

$F_{viscoso} = -cv = -M\Omega\dot{q} \Rightarrow c = M\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{c}{M}$ Coeficiente de roce viscoso

(Todo esto suponiendo que M sea la masa y q la posición)

Hamiltoniano: $H = p\dot{q} - L = M\dot{q}^2 e^{\Omega t} - L = \frac{1}{2}M(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)e^{\Omega t} = E e^{\Omega t}$

Como $\frac{\partial L}{\partial t} = \Omega L$, H no es conservado

Ecuación del movimiento: $\ddot{q} + \Omega\dot{q} + \omega^2 q = 0$

Proponemos: $q(t) = Ae^{\nu t} \Rightarrow \dot{q} = \nu q$, $\ddot{q} = \nu^2 q$

$$\Rightarrow (\nu^2 + \Omega\nu + \omega^2)q = 0 \Rightarrow \nu^2 + \Omega\nu + \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{2}\left(-\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 4\omega^2}\right)$$

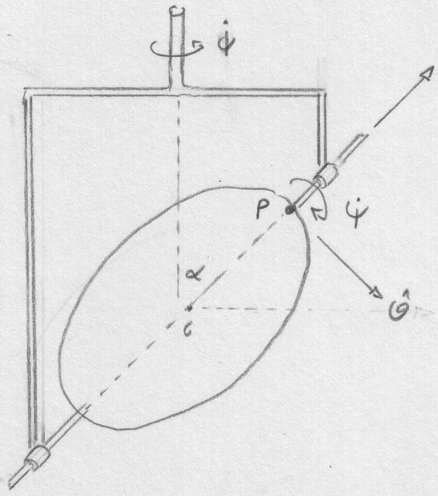
Si $\Omega < 2\omega$: $q(t) = \left(A\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2-\Omega^2}\,t\right) + B\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2-\Omega^2}\,t\right)\right)e^{-\frac{\Omega}{2}t}$

Si $\Omega > 2\omega$: $q(t) = \left(Ae^{-\frac{1}{2}\sqrt{\Omega^2-4\omega^2}\,t} + Be^{\frac{1}{2}\sqrt{\Omega^2-4\omega^2}\,t}\right)e^{-\frac{\Omega}{2}t}$

Si $\Omega = 2\omega$: $q(t) = Ae^{-\omega t} +$ (No me acuerdo)

P2/ Dados los momentos de inercia de un elipsoide simétrico, escriba la energía cinética si éste gira con respecto al eje z y a su eje de simetría. α es fijo.

Sol:/



Describiremos el sistema mediante las coordenadas esféricas del punto P:

$$\vec\omega = \dot\phi\,\hat z + \dot\psi\,\hat r = \dot\phi(\cos(\alpha)\hat r - \sin(\alpha)\hat\theta) + \dot\psi\,\hat r$$

$$= (\dot\phi\cos(\alpha) + \dot\psi)\hat r - \dot\phi\sin(\alpha)\hat\theta$$

Dada la simetría del cilindro, la matriz de inercia en la base de ejes principales tiene la forma:

$$\mathbb{I}^{(c)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Podemos considerar $\{\hat r, \hat\theta, \hat\phi\}$ como ejes principales, aunque no sean solidarios al elipsoide.

$$T = \frac{1}{2}\vec\omega^T \cdot \mathbb{I} \cdot \vec\omega = \frac{1}{2}(I_1\omega_\theta^2 + I_3\omega_r^2) = \frac{1}{2}\left(I_1\dot\phi^2\sin^2(\alpha) + I_3(\dot\phi\cos(\alpha) + \dot\psi)^2\right)$$

Calculemos usando ejes principales solidarios $\{\hat e_1, \hat e_2, \hat e_3\}$

Obs: En realidad, ϕ y ψ son ángulos de Euler. El ángulo de Euler $\theta = \alpha$ está restringido

$\omega_1 = \dot\phi\sin(\alpha)\sin(\psi)$

$\omega_2 = \dot\phi\sin(\alpha)\cos(\psi)$

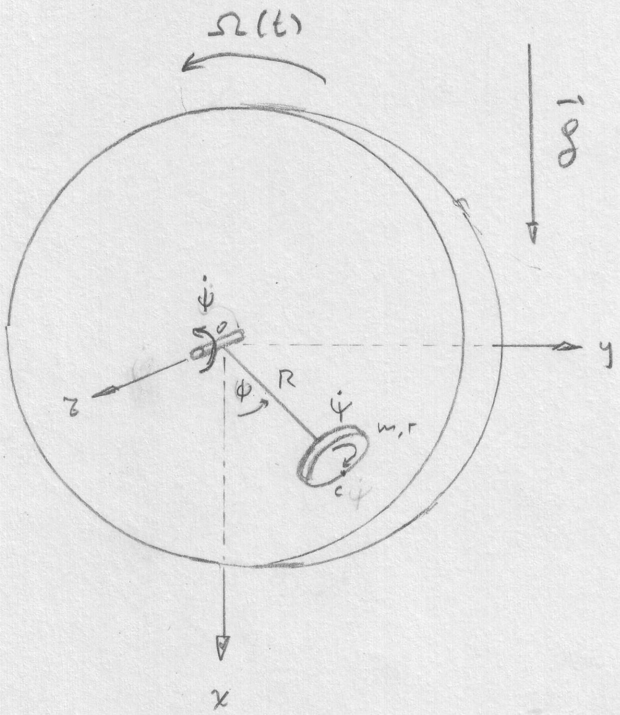
$\omega_3 = \dot\phi\cos(\alpha) + \dot\psi$

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{1}{2}\left(I_1\dot\phi^2\sin^2(\alpha)\,\cancel{(\sin^2(\psi) + \cos^2(\psi))}^{\,1} + I_3(\dot\phi\cos(\alpha) + \dot\psi)^2\right)$$

Mismo resultado. //

P31 Un disco de radio r y masa m se apoya sin resbalar sobre una superficie vertical que gira con velocidad angular $\Omega(t)$.

El disco está sujeto por una vara sin masa de largo R tal como muestra la figura.



a) Encontrar la ecuación del movimiento del ángulo ϕ.

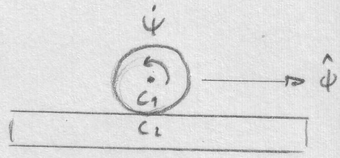
b) Si $\Omega(t) = \alpha t$, encontrar puntos de equilibrio y estabilidad.

Momentos de inercia del disco:

$$\mathbb{I}^{(c)} = m r^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sol: $\vec{r}_G = R\hat{\rho}$ $\qquad \vec{v}_c = R\dot\phi\hat\phi$ $\qquad T_{cm} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_c\|^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot\phi^2$

r.s.r. Punto de contacto: $\vec{v}_{c1} = \vec{v}_{c2}$



$\dot\psi$ es arbitrariamente positivo según $\hat{r}$

$$\vec{v}_{c1} = \vec{v}_c + \vec{v}\,'_{c1} = R\dot\phi\hat\phi + r\dot\psi\hat\phi$$

$$\vec{v}_{c2} = R\Omega(t)\hat\phi$$

r.s.r. $\quad R\dot\phi + r\dot\psi = R\Omega \Rightarrow \dot\psi = \frac{R}{r}(\Omega - \dot\phi)$

Velocidad Angular: $\vec\omega = \dot\phi\hat{z} + \dot\psi\hat{r}$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec\omega^T \cdot \mathbb{I} \cdot \vec\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} m r^2 \dot\phi^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot\psi^2\right) = \frac{1}{8} m r^2 \dot\phi^2 + \frac{1}{4} m R^2 (\Omega - \dot\phi)^2$$

$$U = -mg x_c = -mgR\cos(\phi)$$

$$L = T - U = m\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{8}r^2\right)\dot\phi^2 + \frac{1}{4} m R^2 (\dot\phi - \Omega)^2 + mgR\cos(\phi)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m\left(R^2+\frac{1}{4}r^2\right)\dot\phi + \frac{1}{2}mR^2(\dot\phi-\Omega) = m\left(\frac{3}{2}R^2+\frac{1}{4}r^2\right)\dot\phi - \frac{1}{2}mR^2\Omega$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = m\left(\frac{3}{2}R^2+\frac{1}{4}r^2\right)\ddot\phi - \frac{1}{2}mR^2\dot\Omega$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgR\sin(\phi)$$

Ecuación de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$$m\left(\frac{3}{2}R^2+\frac{1}{4}r^2\right)\ddot\phi - \frac{1}{2}mR^2\dot\Omega(t) + mgR\sin(\phi) = 0 \qquad (a)$$

Obs: $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow H \neq E$ Además H no es conservado

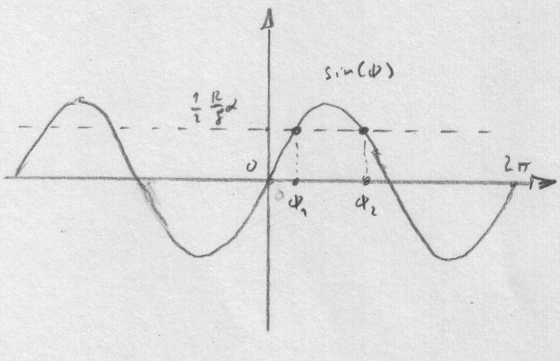
(b) Si $\Omega(t) = \alpha t$, $\dot\Omega(t) = \alpha$

$$m\left(\frac{3}{2}R^2+\frac{1}{4}r^2\right)\ddot\phi - \frac{1}{2}mR^2\alpha + mgR\sin(\phi) = 0$$

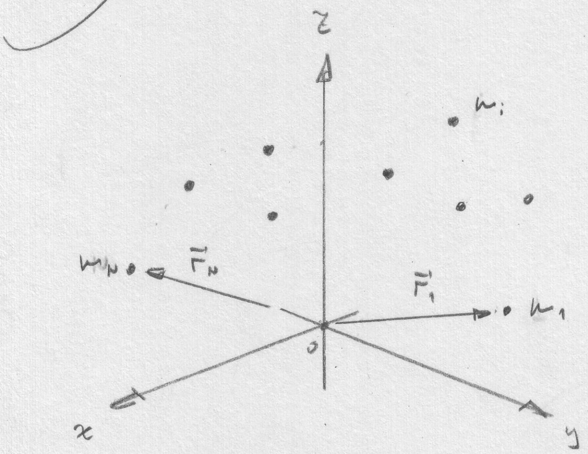
Punto de equilibrio: $\dot\phi = 0$ $\ddot\phi = 0$

$$-\frac{1}{2}mR^2\alpha + mgR\sin(\phi) = 0 \Rightarrow \sin(\phi) = \frac{1}{2}\frac{R}{g}\alpha$$

Si $\frac{1}{2}\frac{R}{g}\alpha \in [-1, 1]$ hay dos puntos de equilibrio



P41



Considere m partículas sometidas a N restricciones del tipo:

$$C_k(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,t)=0 \qquad \forall\, k\in\{1,\dots,M\}$$

Calcule la potencia de trabajo de una restricción. Comente y relacione con el Principio de D'Alembert. ¿Bajo qué circunstancias una fuerza de restricción no trabaja?

Sol: En general el trabajo de una fuerza $\vec{F}$ está dado por:

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^t \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

Y la potencia: $P=\dfrac{dW}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

La restricción $C_k=0$ induce una fuerza sobre cada partícula: $\vec{F}_i[C_k]$

$\vec{F}_i[C_k]=\lambda_k\dfrac{\partial C_k}{\partial \vec{r}_i}$ λ_k es un multiplicador de Lagrange. Hay uno por cada restricción.

La potencia de trabajo de una restricción es:

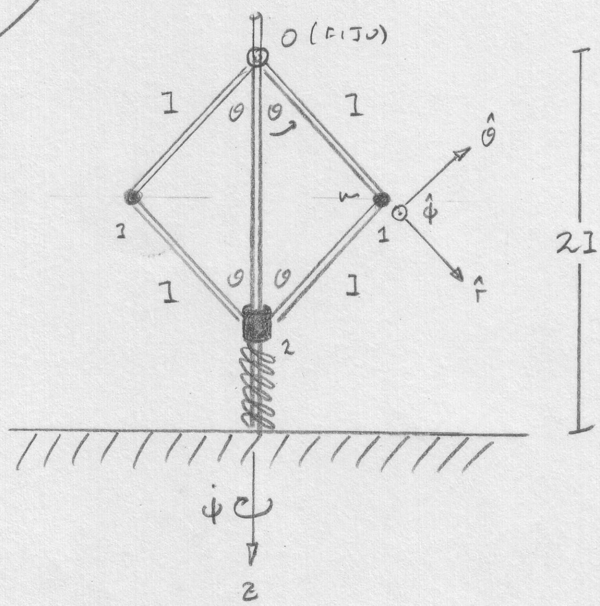
$$P_k=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i[C_k]\cdot\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{N}\lambda_k\frac{\partial C_k}{\partial \vec{r}_i}\cdot\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\lambda_k\left(\frac{dC_k}{dt}-\frac{\partial C_k}{\partial t}\right)$$ (Regla de la Cadena)

Pero si el sistema cumple las restricciones, $C_k=0$ en todo momento

Luego, $\dfrac{dC_k}{dt}=0$ y $P_k=-\lambda_k\dfrac{\partial C_k}{\partial t}$

Una restricción puede hacer trabajo físico cuando es dependiente explícitamente del tiempo; por ejemplo, si una partícula está apoyada en una superficie en movimiento.

P5/ Regulador Centrífugo



Considere cuatro barras de masa nula y largo l, que pueden girar alrededor de un eje vertical. El sistema de barras está fijo al punto O. La masa m puede deslizar sin roce a lo largo del eje y está apoyada a un resorte de rigidez k y largo natural cero.

Encuentre e interprete las ecuaciones del movimiento y las cantidades conservadas.

Sol:/ Hay dos grados de libertad. Consideremos las coordenadas esféricas de la partícula 1. $\vec{q} = (\theta, \phi)$

$\vec{r}_1 = l\hat{r}$ $\qquad$ $\vec{v}_1 = l(\dot\theta\hat\theta + \dot\phi\sin(\theta)\hat\phi)$ $\qquad$ $T_1 = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_1\|^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2(\theta))$

Fácilmente $T_2 = T_1$

$\vec{r}_3 = 2z_1\hat{z} = 2l\cos(\theta)\hat{z}$ $\qquad$ $\vec{v}_1 = -2l\dot\theta\sin(\theta)\hat{z}$ $\qquad$ $T_3 = \frac{1}{2}M\|\vec{v}_3\|^2 = 2Ml^2\dot\theta^2\sin^2(\theta)$

$$U = \frac{1}{2}k(2l - z_3)^2 = kl^2(1-\cos(\theta))^2$$

$$L = T - U = ml^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2(\theta)) + 2Ml^2\dot\theta^2\sin^2(\theta) - kl^2(1-\cos(\theta))^2$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = 2ml^2\dot\theta + 4Ml^2\dot\theta\sin^2(\theta)$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = 2ml^2\ddot\theta + 4Ml^2\ddot\theta + 8Ml^2\dot\theta^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = 2ml^2\dot\phi\sin^2(\theta)$ $\qquad$ $\frac{dp_\phi}{dt} = 2ml^2(\ddot\phi\sin^2(\theta) + 2\dot\phi\dot\theta\sin(\theta)\cos(\theta))$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2ml^2\dot\phi^2\sin(\theta)\cos(\theta) + 4Ml^2\dot\theta^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\phi$ es conservado

Ecuaciones de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

(θ): $(4M+2m)\, l^2 \ddot\theta + 4M l^2 \dot\theta^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - 2m l^2 \dot\phi^2 \sin(\theta)\cos(\theta) = 0$

(ϕ): $2m l^2 \dot\phi \sin^2(\theta) = p_\phi = cte$

$$\dot\phi = \frac{p_\phi}{2m l^2 \sin^2(\theta)}$$

(θ): $(4M+2m)\, l^2 \ddot\theta + 4M l^2 \dot\theta^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{p_\phi^2}{2m l^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} = 0$

Hamiltoniano: $H = p_\theta \dot\theta + p_\phi \dot\phi - L = 2m l^2 \dot\theta^2 + 4M l^2 \dot\theta^2 \sin^2(\theta) + 2m l^2 \dot\phi^2 \sin^2(\theta) - L$

$= 2m l^2 (\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2(\theta)) + 4M l^2 \dot\theta^2 \sin^2(\theta) - (T - U) = 2T - T + U = T + U = E_{TOTAL}$

$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = cte = E$

Propuesto: probar que $\frac{dH}{dt} = 0 \Leftrightarrow (\theta)$

Propuesto: probar que $l_z^{TOTAL} = l_z^1 + l_z^2 + \cancel{l_z^3}^{\,0} = 2 l_z^1 = p_\phi$