Guía 1: Sólido Rígido y Ángulos de Euler

Profesor: Nicolás Mujíca
Profesores Auxiliares: Carlos Suazo M. y Maximiliano Moyano

Problema 1: Si se gira una moneda (disco uniforme, masa m) sobre un eje vertical en una mesa, ésta perdera energía y comenzará a bambolear. El ángulo entre la moneda y la mesa, comenzará a disminuir y eventualmente terminará en el reposo. Asuma que el proceso es lento, y considere el movimiento cuando la moneda tiene un ángulo θ con la mesa (ver figura). Así se puede asumir que el centro de masa (CM) se encuentra escencialmente en reposo. Sea R el radio de la moneda, y sea Ω la frecuencia con la cual el punto de contacto hace un círculo en la mesa. Asuma que la moneda rueda sin resbalar. $(\star\star\star\star\star)_{\mathcal{C.S.}}$

(a) Muestre que el vector de velocidad angular de la moneda es $\omega = \Omega sin\theta \hat{x_2}$, donde $\hat{x_2}$ es el vector unitario que se muestra en la figura.

(b) Muestre que:

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{g}{Rsin\theta}} \tag{1}$$

(c) Muestre que Carlos, que se encuentra mirando desde arriba de la moneda, observa que la frecuencia es:

$$2(1-cos\theta)\sqrt{\frac{g}{Rsen\theta}} \tag{2}$$

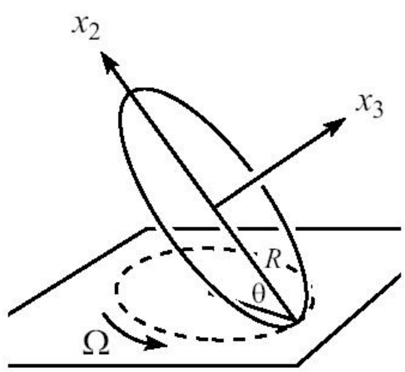

Figura 1

Problema 2: Una barra rígida de largo l y masa despreciable está soldada al punto medio de un disco muy delgado de radio a y masa m formando un ángulo $\pi/2$ con el plano del disco. En el extremo opuesto de la barra se adosa una mada puntual m. $(\star\star\star)_{\mathcal{M.M.}}$

(a) Calcule los momentos pincipales del tensor de inercia del sistema completo (disco, barra, y masa m) en el centro de masa.

(b) Suponga que el sistema completo se mueve libremente en el espacio sometido a un torque constante N_0 a lo largo de la barra. Encuentre la solución general para la velocidad angular $\vec{\omega}$ en función del tiempo, en el sistema de ejes principales solidarios al sistema con origen en el centro de masa. Suponga que en $t = 0$, $\omega_1^0 = \omega_2^0$ y $\omega_3^0 = 0$, donde $\hat{e_3}$ apunta a lo largo de la barra.

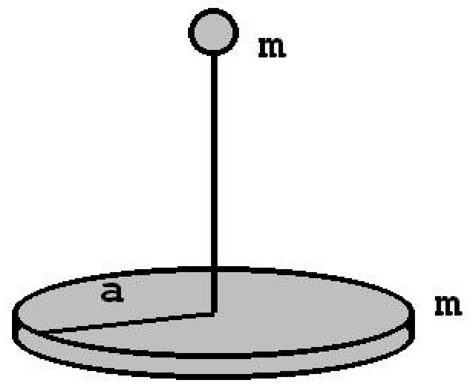

Figura 2

Problema 3: Se lanza un boomerang con velocidad angular inicial:

$$\omega(t=0) = \omega_0 \hat{e_3} + \sqrt{3}\omega_0 \hat{e_2}$$

Utilizando Ecuaciones de Euler, Conservación de la Energía y Conservación de $\left|\vec{L}\right|^2$ (no hay torques externos) y demuestre que: $(\star\star\star)_{\mathcal{M}.\mathcal{M}.}$

$$\vec{\omega}(t) = -\sqrt{3}\omega_0 \cdot tanh\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\hat{e_1} + (\sqrt{3}\hat{e_2} + \hat{e_3})\left(\omega_0 \cdot sech\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right)$$

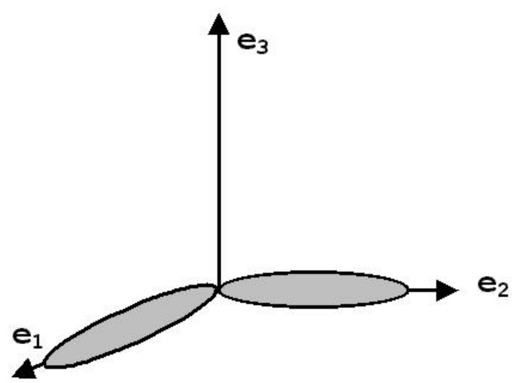

Figura 3

Hint: $I_1 = 2I_0$, $I_2 = I_0$, $I_3 = 3I_0$.

$$\int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Problema 4: Un trompo con púa fija, es puesto en movimiento de modo que $\dot{\theta}_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/2$ y $\dot{\phi}_0 = I_3\omega_3/I$, en que θ es el ángulo de nutación, $\dot{\phi}$ es la velocidad de precesión y ω_3 es la velocidad angular según el eje de simetría del trompo conservada (o en otras palabras L_ϕ/I_3).Demostrar que si $I_3^2\omega_3^2 = 2mgIh$ (en que h es la distancia a lo largo del eje de revolución del trompo, desde el punto fijo al centro de masa), el eje de simetría tiende asintóticamente a la posición vertical.$(\star\star)_{\mathcal{M}.\mathcal{M}.}$

Problema 5: Considere un sólido rígido, formado por N discos de masa m, radio R y tensor de inercia en los ejes principales $I_1 = I_2 = mR^2/4$ e $I_3 = mR^2/2$ en presencia de gravedad.

Los discos se unen uno sobre otro separados por una barra de largo a, como se muestra en la figura. El largo total del sólido es $L = Na$ y la masa total $M = Nm$. El primer disco esta separado del punto fijo O también por una barra de largo a. $(\star\star\star)_{\mathcal{M}.\mathcal{M}.}$

(a) Usando el Teorema de Steiner: $(I_0)_{ij} = (I_{CM})_{ij} + m[\vec{a}^2\delta_{ij} - (\vec{a})_i(\vec{a})_j]$, calcule el momento de inercia total del sólido con respecto al punto O. El siguiente resultado le será de gran utilidad:

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

(b) Tomando el límite $N \to \infty$, $a \to 0$ y $m \to 0$ de modo que L y M son finitos, con $L = R$, calcule: Los límites de nutación si la condición inicial es sólo una velocidad de rotación (spin), i.e., $\dot{\theta}(t=0) = 0$, $\dot{\phi}(t=0) = 0$ y $\theta(t=0) = 0$ con $\dot{\psi}(t=0) = \psi_0 = \sqrt{\frac{7g}{3L}}$.

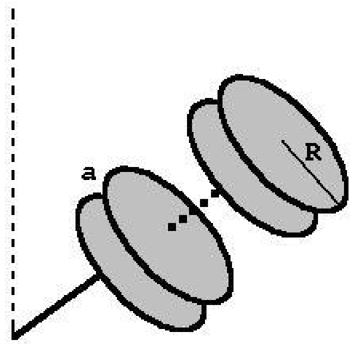

Figura 4

Problema 6: Considerando la misma configuración del problema anterior[1]. Determine la condición para que el sistema precese, con un ángulo de nutación fijo $\theta(t) = \theta_0$. ¿Cúal debería ser la velocidad angular relativa posible de los discos si $\theta_0 = \pi/2$? $(\star\star)_{\mathcal{C}.\mathcal{S}.}$

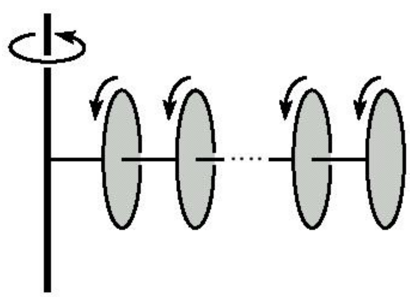

Figura 5

Problema 7: (*Teorema del Raquet de Tenis*) Si tratas de girar un raquet de tenis (o un libro, etc.) alrededor de uno de los tres ejes principales, notarás que ocurren cosas diferentes en ejes diferentes. Asumiendo que los momentos principales de inercia (con respecto al centro de masa) son $I_1 > I_2 > I_3$ (ver Figura 5) encontrarás que tiene spin *agradable* alrededor de los ejes $\hat{x_1}$ y $\hat{x_3}$, pero bamboleará en una forma extraña si tratas de girarlo con respecto al eje $\hat{x_2}$. Verificar esta afimación matemáticamente. El punto principal de ésto, es que no se puede empezar el movimiento con ω apuntando exactamente a través de los ejes principales. Por lo tanto, lo que se

[1]Se necesita sólo suponer simetría sólo con respecto al eje del cuerpo. El problema es **distinto al anterior**, pero los discos y las barras son dispuesto de igual manera

debe demostrar es que el movimiento en los ejes 1 y 3 es estable (esto es, pequeños errores en las condiciones iniciales se mantienen pequeños en la solución); en tanto, el movimiento en el eje 2 es inestable. (esto es, pequeños errores en la condición inicial se vuelven cada vez más grandes) La tarea es usar las Ecuaciones de Euler para probar lo anterior acerca de la estabilidad. $(\star\star\star)_{\mathcal{C.S.}}$ (**Hint:** Para la resolución del ejercicio le será de gran utilidad comprobarlo de manera empírica antes de comenzar a resolverlo.)

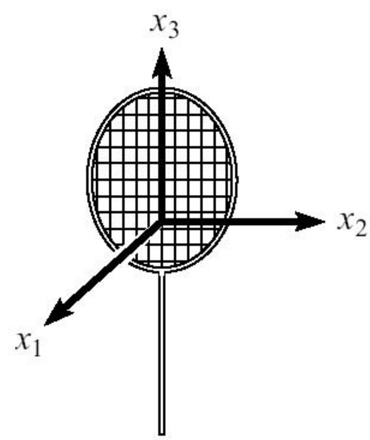

Figura 6

Problema 8: (*Lollipop rodando*) Considere un lollipop (o un dulce, como le acomode) hecho de una esfera maciza de masa m y radio r, la cual está enganchada radialmente con una barra de masa despreciable. Al final de la barra se encuentra un pivote en el piso. La esfera rueda en el piso sin resbalar, con su centro de masa moviéndose en una circunferencia de radio R, con frecuencia Ω. $(\star\star\star\star)_{\mathcal{C.S.}}$

(a) Encuentre el vector de velocidad angular, $\vec{\omega}$.

(b) ¿Cuál es la fuerza normal entre el piso y la esfera?

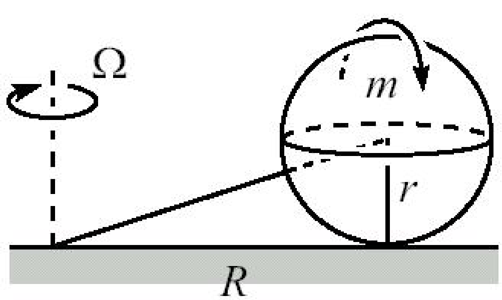

Figura 7