Guía Control 1: Formulación Lagrangeana y Método de Multiplicadores de Lagrange[1]

FI21B - Sistemas Dinámicos

Carlos A. Suazo Martínez

Viernes 19 de Agosto de 2005

[1]Esta guía comprende ejercicios de Formulación Lagrangeana y Multiplicadores de Lagrange del curso FI21B. Cualquier tipo de consulta o error enviar a: casuazo@die.uchile.cl

1. Introducción

1.1. Constricciones, Grados de Libertad y Coordenadas Generalizadas

Para N partículas:

$$m\ddot{\vec{r_i}} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{ext} + \sum_{j=1}^{N} F_{ji}$$

El primer término corresponde a las Fuerzas Externas y el segundo a la Interacción entre partículas que ocurre para $j \neq i$. Para N partículas pueden existir distintas ecuaciones de ligadura que restringen el movimiento, las denominadas *restricciones o constricciones al movimiento*. Así dadas N partículas con K restricciones, se tiene que el sistema posee: $n = 3N - K$ grados de libertad. Esto quiere decir que sólo se necesitan n coordenadas para describir completamente el movimiento del sistema. Es importante observar que cuando en un caso determinado se necesiten n coordenadas, no será necesario elegir precisamente n coordenadas rectangulares, o ni siquiera n coordenadas curvilineas (esféricas, cilíndricas, etc.); basta con elegir n parámetros cualesquiera, mientras definan por completo el estado del sistema. La expresión sistema de *coordenadas generalizadas* designa todo conjunto de cantidades que deje completamente especificado el estado del sistema y es costumbre representarlas por $q_1, q_2, \ldots$ o simplemente q_j.

1.2. Ecuación de Euler-Lagrange

1.2.1. Principio de D´Alambert

Para formular este principio comenzaremos por definir un desplazamiento virtual $\delta\vec{r_i}$ como un cambio infinitesimal, arbitrario, a tiempo fijo de la coordenada $\vec{r_i}$, que debe ser consistente con las constriciones.

Las ecuaciones de Newton de nuestro sistema de N partículas pueden escribirse como:

$$m\ddot{\vec{r_i}} = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f_i}$$

donde los $\vec{f_i}$ son las fuerzas de constricción y $\vec{F}_i^{(a)}$ las fuerzas aplicadas. Proyectamos esta ecuación por $\delta\vec{r_i}$ y sumamos sobre i:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m\ddot{\vec{r_i}} - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \delta\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f_i} \cdot \delta\vec{r_i}$$

Como los $\delta\vec{r_i}$ deben respetar las constricciones, las fuerzas de constricción no realizan trabajo virtual, es decir:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m\ddot{\vec{r_i}} - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \delta\vec{r_i} = 0$$

Para escribirlo en su forma *útil*, se usan las ecuaciones de transformación $\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, \ldots, q_n, t)$. Así:

$$\delta\vec{r_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j} \delta q_j$$

Usando la definición de Energía Cinética:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r_i}}^2$$

finalmente se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_i}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_j = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}$$

Si $\vec{F}_i^{(a)}$ proviene de un potencial $\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i V$ y además $\frac{\partial V}{\partial \dot{q_j}} = 0 \; \forall j$; definiendo $L = T - V$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

1.2.2. Principio de Hamilton

Existe otro tipo de formulación para llegar a la ecuación de Euler-Lagrange, este es el Principio de Hamilton: ***De todas las trayectorias posibles que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro, la trayectoria verdadera seguida es aquella que hace mínima la integral temporal de la diferencia entre la energía cinética y potencial***.

En términos de análisis varacional:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V)dt = 0$$

donde T es la energía cinética y V la energía potencial del sistema y $L = T - V$ recibe el nombre de **Lagrangeano**.

El método de Euler-Lagrange (E-L) permite obtener las ecuaciones de movimiento de manera muy sencilla, siguiendo unos pasos que se enumerarán a continuación:

1.) Se escribe el Lagrangeano $L = T - V$ en función de las coordenadas generalizadas $q_1, \ldots, q_n$.

2.) Si las fuerzas aplicadas al sistema, son de la forma $\vec{F}_i = -\vec{\nabla} V_i$ entonces se cumple que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

En el caso general, la ecuación para obtener las ecuaciones de movimiento es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_j$$

donde $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ Al reemplazar el Lagrangeano se obtienen n ecuaciones diferenciales para las n coordenadas generalizadas.

1.3. Cantidades Conservadas

Si el Lagrangeano que describe un sistema presenta invarianza respecto a cambio en sus coordenadas o el tiempo se dice que hay cantidades conservadas, también llamadas constantes de movimiento.

Si L no depende explícitamente del tiempo, $\partial L/\partial t = 0$, tal que L es invariante respecto a cambiar $t \rightarrow t + \Delta t$, entonces el Hamiltoneano definido por

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

es una constante de movimiento, es decir, $H = cte$.

Si además, $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0 \ \forall i$, tal que T se escribe como una forma cuadrática de las velocidades:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Entonces $E = H = cte$. Por último se define ***momentum generalizado*** P_m como:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = P_m$$

Si L no depende de q_m talque $\frac{\partial L}{\partial q_m} = 0$, es decir, L es invariante respecto a $q_m \rightarrow q_m + \Delta q_m$, entonces P_m es una cantidad conservada, por lo tanto, $P_m = cte$.

Dependiendo de las unidades físicas de q_m, P_m puede ser un momentum lineal o angular.

1.4. Método de Multiplicadores de Lagrange

En ciertas ocaciones puede ser ventajoso utilizar coordenadas generalizadas en número superior al de grados de libertad, teniendo en cuenta explícitamente las relaciones de ligadura utilizando los multiplicadores de Lagrange. Éste sería el caso, por ejemplo, si desearamos calcular las fuerzas de ligadura o de constricción. Existe un tipo de ligaduras que son de tipo holónomas (que son las que se verán en este curso) que son aquellas que pueden expresarse en forma de relaciones algebraica entre las coordenadas, del estilo:

$$C_a(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$$

$$C_a(q_1, \ldots, q_N, t) = 0$$

Donde $a = 1, \ldots, K$. Cuando un sistema se haya sometido únicamente a esta clase de ligaduras, puede determinarse siempre un sistema de coordenadas generalizadas en función de las cuales las ecuaciones de movimiento están desprovistas de todo referencia explícita a las ligaduras. Para constricciones de este tipo se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{a=1}^{K} \lambda_a(t) \frac{\partial C_a}{\partial q_j}$$

De donde salen $3N$ ecuaciones, una por cada coordenada q_j con $j = 1..,3N$. Hay además K ecuaciones de constricción y hay $3N + K$ *incógnitas*; las N coordenadas q_j y los K multiplicadores de Lagrange λ_a. Es importante notar que se supone ahora que las $3N$ coordenadas son independientes y se imponen las constricciones al final.

Finalmente, las fuerzas de constricción se calculan conociéndose los multiplicadores de Lagrange λ_a:

$$\vec{f}_i = \sum_{a=1}^{K} \lambda_a \vec{\nabla}_i C_a.$$

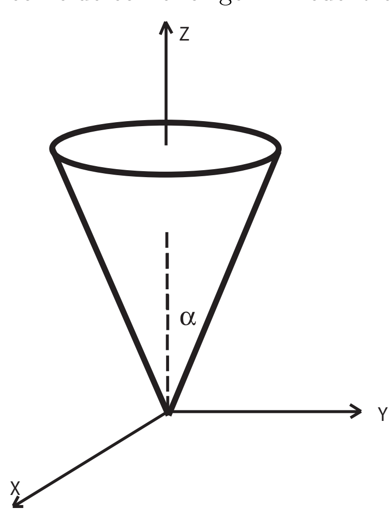
2. Problemas

Problema 1: (Equivalencia Lagrange - Newton)

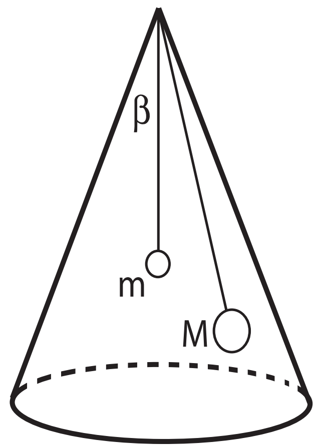
a.) Mediante un ejemplo simple, muestre que la Mecánica de Lagrange es equivalente a la Mecánica de Newton

b.) Considere las siguientes cantidades: Energía, momentum lineal y momentum angular. Muestre que las condiciones para su conservación según la Mecánica de Lagrange son equivalentes a las condiciones que se imponen en la Mecánica de Newton.

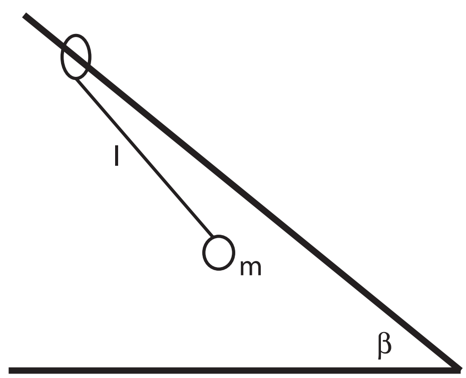
Problema 2: Considere una partícula de masa m limitada a moverse sobre la superficie de un cono de semiangulo α y sometida a la acción de la gravedad. Como se indica en la figura, el eje del cono se encuentra sobre el eje z y su vértice coincide con el origen. Encuentre la ecuación de movimiento para r.



Problema 3: Dos partículas de masas m y M unidas por una cuerda inextensible se unen como se ilustra en la figura. Una de ellas sobre un cono de ángulo β cuyo eje coincide con el eje vertical (hay gravedad) y la otra sobre el eje z. Escriba el Lagrangeano y determine las ecuaciones de movimiento



Problema 4: Considere una argolla sin masa que cae por un riel sin roce. Atado a la argolla se encuentra una masa m mediante una cuerda inextensible de largo l. Plantee los grados de libertad. Escriba el Lagrangeano del sistema. Finalmente deduzca las ecuaciones de movimiento.



Problema 5: Dos masas puntuales m_1 y m_2 están conectadas por una cuerda de largo constante l, la cual pasa por un agujero que se encuentra en la superficie de una mesa. La masa m_1 se encuentra apoyada sobre la mesa y la masa m_2 cuelga desde el agujero. Considere que no hay roce entre la cuerda y el agujero, como también entre la masa m_1 y la superficie de la mesa. Además, la masa m_2 sólo se mueve en forma vertical. Considere el movimiento de manera que las masas no pueden pasar por el agujero, ni la masa m_1 salirse de la mesa.

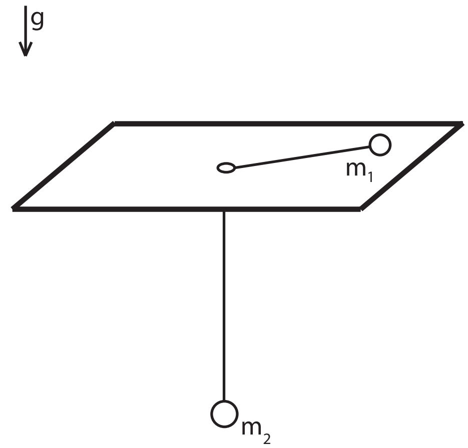
a.) Cuántas coordenadas independientes tiene este sistema?. Cuáles son las coordenadas generalizadas?.

b.) Escriba el Lagrangeano del sistema y deduzca las ecuaciones de movimiento.

c.) Cuáles son las cantidades conservadas?. Justifique su respuesta desde el punto de vista de la mecánica de Lagrange.

d.) Obtenga una ecuacion diferencial de segundo orden para una de las coordenadas generalizadas. Interprete cada término de esta ecuación.

e.) Ahora suponga que la masa m_2 no está restringida a moverse en forma vertical, cuáles son las coordenadas generalizadas en este caso?. Qué cantidad conservada adicional aparece en el problema?.



Problema 6: (Péndulo de Andronov) Una masa m puede deslizar sin roce sobre un aro de radio R y de momento de inercia I, tal como se muestra en la figura. Este aro gira con velocidad angular constante Ω. El sistema se encuentra en un campo gravitacional de constante g.

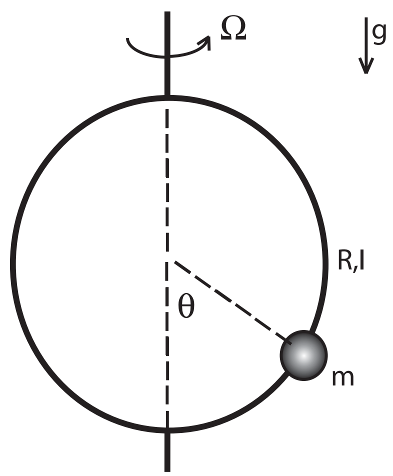
a.) Determine el Lagrangeano del sistema.

b.) Escriba las cantidades conservadas justificando su respuesta.

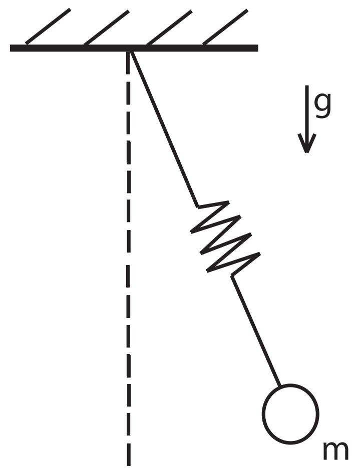
c.) Escriba la ecuación de movimiento de la masa m y determine los puntos de equilibrio tales que $\ddot{\theta} = 0$.

d.) Usando las cantidades conservadas defina el potencial efectivo $V_{eff}(\theta)$. Verifique que los puntos de equilibrio que se obtienen con este potencial son los mismos que aquellos obtenidos en la parte (c).

e.) Analice la estabilidad de los puntos de equilibrio encontrados en (c), ya sea a partir de la ecuación de movimiento para θ o a partir del pontencial efectivo $V_{eff}(\theta)$. Muestre que existe una velocidad de rotación crítica $\Omega_c = \sqrt{g/R}$ donde la estabilidad de la masa m cambia en forma drástica.



Problema 7: Un resorte sin masa, de longitud natural l_o tiene una masa m en su extremo en presencia de la gravedad. El péndulo se mueve libre en el aire que ejerce una fuerza de roce dada por $\vec{F_{roce}} = -\gamma\dot{\vec{r}}$. Escriba el Lagrangeano del sistema y plantee las ecuaciones de movimiento para todas las coordenadas generalizadas.



Problema 8: Un anillo de masa puntual m desliza bajo la acción de la gravedad sobre un espiral de masa despreciable y de paso constante h_o. Además, esta espiral se encuentra enrollada en forma de cono de semi-angulo α, como se muestra en la figura.

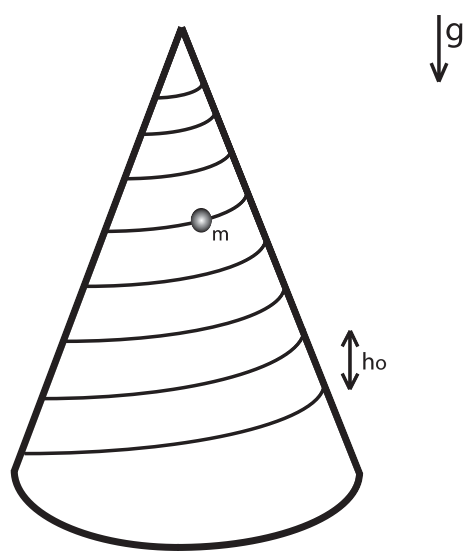
a.) Cuántas coordenadas independientes tiene este sistema? Cuáles son las buenas coordenadas generalizadas?.

b.) Escriba el Lagrangeano del sistema en función de las coordenadas generalizadas.

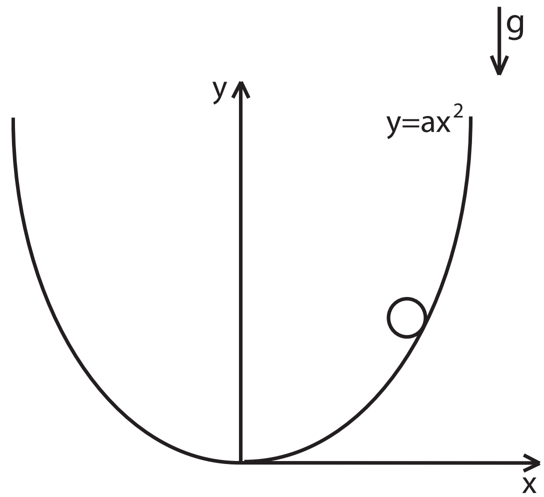
c.) Cuáles son las cantidades conservadas?. Justifique su respuesta desde el punto de vista de la mecánica de Lagrange.

d.) Obtenga una ecuación diferencial de segundo orden para una de las coordenadas generalizadas. Tome el límite $\alpha \to 0$ e interprete la ecuación diferencial que resulta.

e.) Ahora suponga que la masa m cae desde el origen de la espiral en la punta del cono con velocidad nula. Cuál es la velocidad del anillo después de dar N vueltas?.



Problema 9: Una partícula puntual de masa m se mueve en una parábola de ecuación $y = ax^2$ bajo la acción de la fuerza de gravedad. Calcule la fuerza de restricción que actúa sobre la partícula. Interprete esta fuerza.



Problema 10: Una partícula puntual de masa m se mueve en una parábola de ecuación $y = ax^2$ bajo la acción de la fuerza de gravedad.

a.) Usando la Mecánica de Lagrange, obtenga una ecuación de movimiento de segundo orden para la masa m.

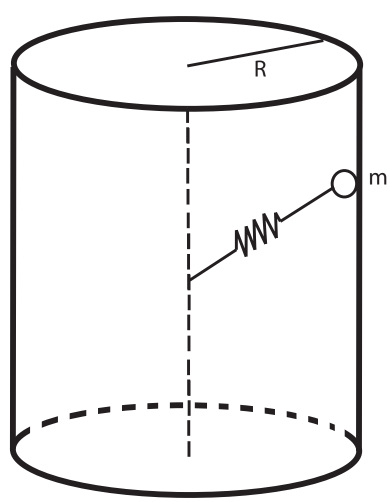
b.) Usando la ecuación deducida en (a), tome los límites $a \to \infty$ y $a \to 0$, y discuta las ecuaciones que se obtienen.

Nota: Para la parte (b) le puede ser de ayuda abordarlo con una variable como independiente, digamos la que utilizó en la parte (a), y luego repetir el cálculo con la otra variable como independiente.

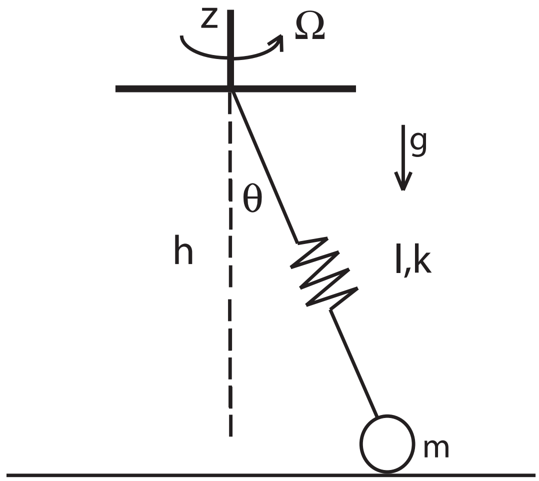
Problema 11: Considere una partícula puntual de masa m que se mueve en la superficie de un cilindro de radio R. La partícula, además, está unida a un resorte de largo natural l_o y constante k al origen del sistema de coordenadas. Despreciando la gravedad:

a.) Escriba el Lagrangeano del sistema y sus respectivas ecuaciones de movimiento.

b.) Analice la existencia de puntos de equilibrio y su estabilidad para diferentes valores del parámetro $\mu = l_o - R$.



Problema 12: Considere el sistema de la figura, donde el resorte cuelga de una altura h y su largo natural $l > h$. Si se impone una velocidad angular Ω constante en torno al eje $\hat{z}$ determine, usando métodos de Lagrange, el ángulo θ al que la partícula deja el suelo. Interprete la fuerza de constricción. (desprecie el roce de la masa con el suelo)



Problema 13: En la figura se representa un regulador centrífugo, constituído por cuatro barras articuladas de masa despreciable y longitud l, que giran alrededor de un eje vertical, con velocidad angular Ω constante, en un campo gravitatorio de constante g. El sistema de barras está fijo al punto B. El cuerpo de masa M, que puede deslizar sin roce a lo largo del eje, está apoyado a un resorte de constante k y largo natural nulo. Las masas en las articulaciones A de las barras son iguales y de masa m.

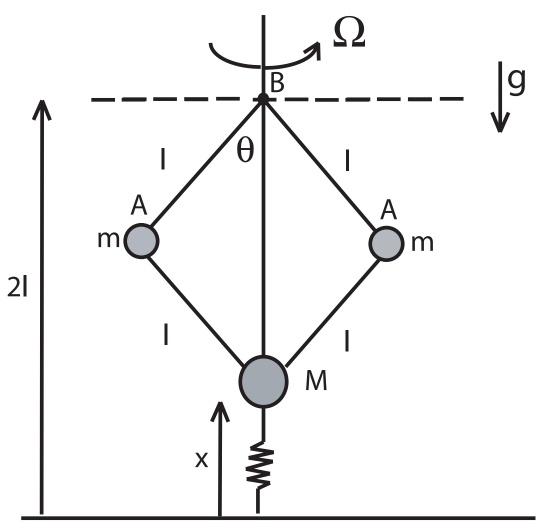
a.) Para $\Omega = 0$, sin resolver las ecuaciones justifique que el punto de equilibrio estable corresponde a $\theta = 0$.

b.) Cuáles son las constricciones del problema?

c.) Encuentre el Lagrangeano del sistema para $\Omega > 0$ y escriba la ecuación de movimiento para θ.

d.) Cuáles son las cantidades conservadas?

e.) Demuestre que el punto de equilibrio $\theta = 0$ pierde estabilidad para un valor crítico de velocidad de rotación igual a $\Omega^2 = (M + m)g/(ml)$.



3. Referencias

[1] *Problems and Solution on Mechanics*, Lim Yung-kuo, Editorial World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Año 1994

[2] *Introductory Classical Mechanics, with Problems and Solutions*, David Morin, Harvard University, Año 2003