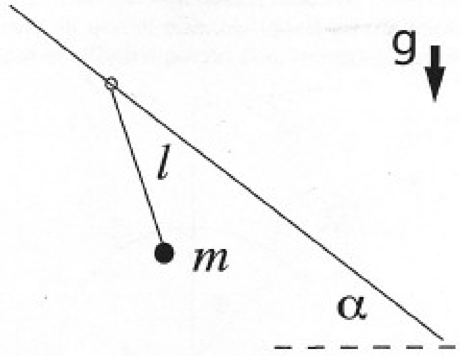
Sistemas Dinámicos

Ejercicio 1: **Tiempo:** 1 hora
Prof: Felipe Barra, Aux: Maximiliano Moyano

Problema Considere un péndulo cuyo punto de apoyo puede deslizar (sin roce) libremente sobre una barra fija e inclinada en un ángulo α. El péndulo tiene largo l y masa m. Considerando que el movimiento ocurre en el plano de la figura:



- Elija los grados de libertad apropiados y construya el Lagrangiano $L = T - V$
- Obtenga las ecuaciones de movimiento (Ecs. Euler-Lagrange).
- Verifique que si la argolla esta fija, entonces recupera la ecuación usual del péndulo.

Nota: Desprecie la masa de la argolla en la que se suspende el péndulo.

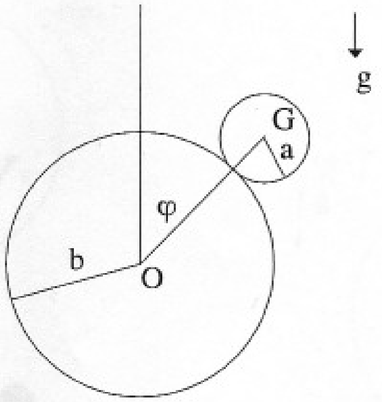
Sistemas Dinámicos

Ejercicio **2**: Tiempo: **1** hora
Prof: Felipe Barra, Aux: Maximiliano Moyano

Problema

Considere un cilindro de radio a y masa m que rueda sin resbalar sobre otro cilindro de radio b. El momento de inercia del cilindro con respecto al eje de rotación es $I = mb^2/2$.

Usando el método de Lagrange para problemas con constricciones, determine el ángulo ϕ que forma la vertical con la linea de los centros OG en el instante en que el cilindro móvil pierde contacto con el cilindro fijo suponiendo que no se ha producido resbalamiento y que el cilindro partió con velocidad despreciable.



Note que a ese instante en particular la fuerza normal se anula.

Sistemas Dinámicos

Ejercicio **3**: Tiempo: **40** minutos
Prof: Felipe Barra, Aux: Maximiliano Moyano

Problema

Considere el movimiento de una partícula en un plano descrito por coordenadas polares en el que el potencial que actua sobre la partícula depende sólo de la coordenada radial

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{1}$$

- Escriba el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento.
- Usando la ley de conservación que aparece en el punto anterior, escriba una ecuación para r.
- Busque los puntos de equilibrio de esta ecuación
- Discuta la estabilidad de los puntos de equilibrio
- Interprete en términos del movimiento en el plano r, θ el significado del punto de equilibrio.

Sistemas Dinámicos

Ejercicios **1,2 y 3**
Prof: Felipe Barra, Aux: Maximiliano Moyano

Ejercicio 1
Considere un péndulo al cual se le aplica un torque constante con respecto al punto de suspensión de modo que la ecuación para el ángulo θ es

$$\ddot{\theta} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\theta + \tau$$

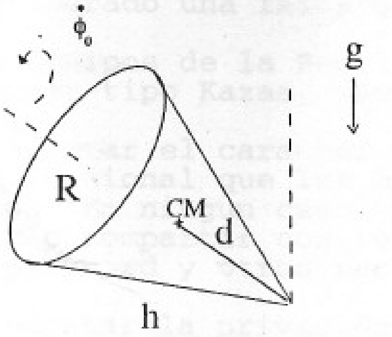
(3.5 pts.) a) Calcule los puntos de equilibrio e indique cuales son establés e inestables. Para esto haga un dibujo idicando para cada posición de equilibrio su estabilidad.

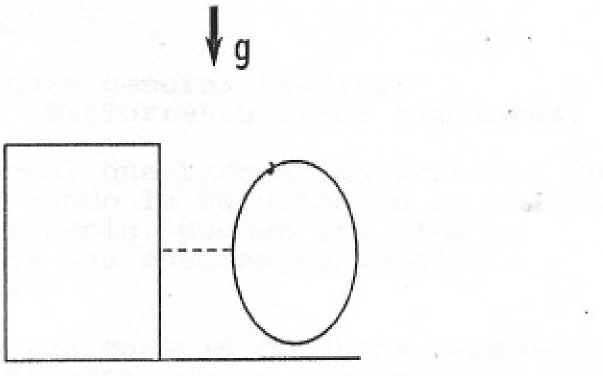
(2.5 pts.) b) Dibuje el digrama de bifurcación de las soluciones estacionarias con respecto al parámetro τ, osea en el eje y van las soluciones estacionarias y en el x el parámetro τ. Las soluciones son función de τ. Indique con trazo continuo las soluciones estables y discontinuo las inestables en la región en que estas existen.

Ejercicio 2
Conbsidere un trompo de forma cónica de masa m, altura h y radio basal $R = h$.
Considere además que la punta esta fija y que el trompo se suelta animado sólo con velocidad angular de rotación (spin) $\dot{\phi}_0 = \frac{10}{R}\sqrt{\frac{gd}{3}}$ desde un ángulo $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ donde d es la distancia de la punta al centro de masa del cono (ver figura).
Usando el método del potencial efectivo, calcule los ángulos θ_m y θ_M de nutación, osea $\theta(t) \in [\theta_m, \theta_M]$
Nota: En general para un cóno se tiene

$$I_1 = I_2 = I' = \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)$$

$$I_3 = I = \frac{3}{10}mR^2$$





Ejercicio 3 Una bloque de masa M se conecta riguidamente a un aro de masa despreciable por el que se mueve un anillo de masa m. El centro de masa del bloque se encuentra a la misma altura que el centro del aro. Desprecie todas las fricciones. Sin la restricción el problema tiene 3 grados de libertad.

(2 pts.) a) Escriba el Lagrangiano del sistema con θ úna de las coordenadas generalizadas y usando el método de Lagrange para incluir la constricción de riguidez entre el bloque y el aro.

(4 pts.) b) Escriba las ecuaciones de movimiento e interprete físicamente el parámetro λ de Lagrange.