# Ejercicio 1
# Sistemas Dinámicos FI21B

Profesor Nicolás Mujica
Auxiliares: Maximiliano Moyano y Carlos Suazo
24 de Agosto 2004

**Mecánica de Lagrange:** Dos masas puntuales $m_1$ y $m_2$ están conectadas por una cuerda de largo constante $l$, la cual pasa por un agujero que se encuentra en la superficie de una mesa. La masa $m_1$ se encuentra apoyada sobre la mesa y la masa $m_2$ cuelga desde el agujero. Considere que no hay roce entre la cuerda y el agujero, como también entre la masa $m_1$ y la superficie de la mesa. Además, la masa $m_2$ sólo se mueve en forma vertical.

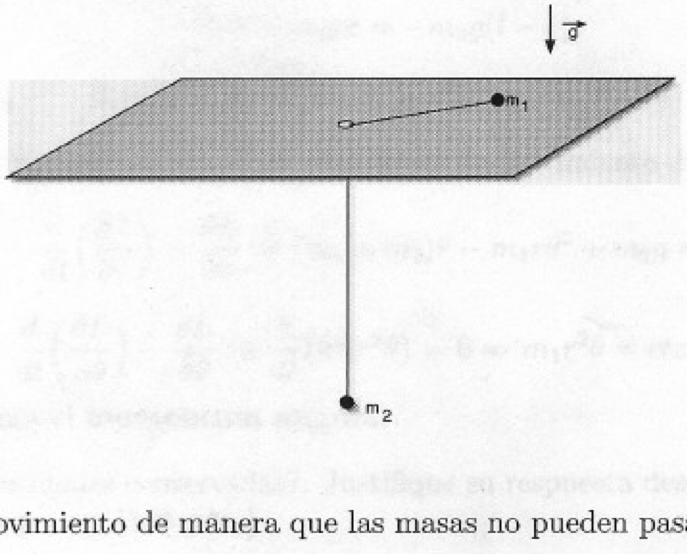
(a) Cuántas coordenadas independientes tiene este sistema ? Cuáles son las coordenadas generalizadas ?

(b) Escriba el Lagrangiano del sistema y deduzca las ecuaciones de movimiento.

(c) Cuáles son las cantidades conservadas ? Justifique su respuesta desde el punto de vista de la mecánica de Lagrange.

(d) Obtenga una ecuación diferencial de segundo orden para una de las coordenadas generalizadas. Interprete cada término de esta ecuación.

(e) Ahora suponga que la masa $m_2$ no está restringida a moverse en forma vertical, cuáles son las coordenadas generalizadas en este caso ? Qué cantidad conservada adicional aparece en el problema ?




**Nota:** Considere el movimiento de manera que las masas no pueden pasar por el agujero, ni la masa $m_1$ salirse de la mesa.

# Pauta Ejercicio 1
# Sistemas Dinámicos FI21B

Profesor Nicolás Mujica
Pauta por Carlos Suazo M.
24 de Agosto 2004

(a) Cuántas coordenadas independientes tiene este sistema?. Cuáles son las coordenadas generalizadas? **[1.5 ptos.]**

**Solución:** Claramente en nuestro sistema existen 2 grados de libertad. Esto dado a que para $n = 3N - K$, $N$ el número de partículas es 2, mientras que el número de restricciones $K$ son 4 (2 dado a que $m_2$ sólo se mueve verticalmente, 1 por que $m_1$ está en el plano y 1 por el largo $l$ de la cuerda). Entonces, dado a que tenemos 2 grados de libertad podemos tomar como coordenadas generalizadas los parámetros $r$ y $\theta$ de las coordenadas polares, para la masa $m_1$. Con esto nuestro sistema queda perfectamente descrito.

(b) Escriba el Lagrangiano del sistema y deduzca las ecuaciones de movimiento. **[1.5 ptos.]**

**Solución:** Dado a que tenemos nuestras coordenadas generalizadas, debemos escribir el Lagrangiano, pero antes si denotamos al parámetro $x$ como la distancia medida desde el plano hasta la partícula de masa $m_2$ tenemos:

$$x + r = l \Rightarrow x = l - r \Rightarrow \dot{x} = -\dot{r} \tag{1}$$

Entonces de (1) más la velocidad en coordenadas polares tenemos que:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2$$

$$V = -m_2 g x = -m_2 g(l - r)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mg(l - r) \tag{2}$$

Entonces con (2) podemos deducir las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{r} - m_1 r\dot{\theta}^2 + m_2 g = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1 r^2 \theta) = 0 \Rightarrow m_1 r^2\dot{\theta} = cte = l_0 \tag{4}$$

Donde $l_0$ representa el **momentum angular**.

(c) Cuáles son las cantidades conservadas?. Justifique su respuesta desde el punto de vista de la mecánica de Lagrange.**[1.0 pto.]**

**Solución:** Además de conservarse la energía (ya que el sistema es conservativo), gracias a la ecuación obtenida para $\dot{\theta}$ podemos decir que también el momento angular $l_0$ es conservado, quedando la siguiente igualdad:

$$\dot{\theta} = \frac{l_0}{m_1 r^2} \tag{5}$$

(d) Obtenga una ecuación diferencial de segundo orden para una de las coordenadas generalizadas. Interprete cada término de esta ecuación.**[1.0 pto.]**
**Solución:** Si reemplazamos la ecuación anteriormente obtenida en la ecuación (3) tenemos que:

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} = \frac{l_0^2}{m_1 r^3} - m_2 g \tag{6}$$

A partir de esto podemos ver que hemos obtenido una ecuación del estilo $M\ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}$ donde $V_{eff}$ recibe el nombre de **Potencial Efectivo** y $M$ es la masa total del sistema.

(e) Ahora suponga que la masa $m_2$ no está restringida a moverse en forma vertical, cuáles son las coordenadas generalizadas en este caso?. Qué cantidad conservada adicional aparece en el problema?.**[1.0 pto.]**
**Solución:** Claramente aparecen 2 grados de libertad que el problema antes no tenía. Tomemos además un sistema de coordenadas esférico para describir el movimiento de la partícula 2[1]. Vamos a seguir ocupando el sistema polar para la partícula 1, podemos mezclar estos dos sistemas de coordenadas para encontrar la energía cinética del sistema por que ambos son inerciales y lo que necesitamos son magnitudes que necesariamente no dependen del sistema seleccionado. Luego:

$$\vec{r_2} = (l - r)\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r_2}} = -\dot{r}\hat{r} + (l - r)\dot{\theta}_2\hat{\theta}_2 + \dot{\phi} sin(\theta_2)(l - r)\hat{\phi}$$

Elevamos cada término al cuadrado (lo podemos hacer por que los vectores unitarios son ortogonales) y escribimos el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{r}^2 + (l - r)^2\dot{\theta_2}^2 + (l - r)^2\dot{\phi}^2 sin^2(\theta_2) + m_2 g(l - r)cos(\theta_2)$$

Si derivamos con respecto a $\phi$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\Big(m_2\dot{\phi} sin^2(\theta_2)(l - r)^2\Big) = 0$$

Luego lo que se conserva es el momentum angular para $\phi$, i.e.,para la patícula de masa $m_2$.

[1] De la 2 coordenadas generalizadas que se tenían antes, sumamos los parámetros $\theta_2$ y $\phi$. Es de esta forma como tenemos nuestras 4 coordenadas generalizadas para los 4 grados de libertad.