Control I
Sistemas Dinámicos-2002/02

Prof. Marcel G. Clerc

Auxiliares: Claudio Falcón y Miguel trejo

Tiempo: 3:00 Hrs.

1) Regulador centrífugo: un modelo simplificado de un regulador centrífugo es considerar cuatro barras articuladas de masa despreciable y de igual longitud l, que pueden girar alrededor de un eje vertical, como se ilustra en la figura. El sistema de barras esta fijo al punto B. La masa m' puede deslizar sin rozamiento a lo largo del eje, la cual está apoyado en un resorte de constante k y largo natural cero. Las esferas en las articulaciones A de las barras son iguales y de masa m.

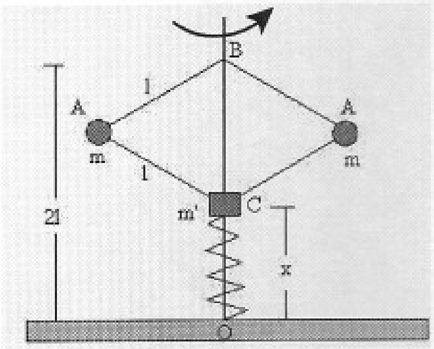


FIG. 1. Regulador centrífugo.

1-a ¿Cuantos grados de libertad caracterizan al sistema y cuales son?.

1-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales están relacionadas estas cantidades conservadas.

1-b Encuentre las ecuaciones de movimiento e interprete fisicamente los términos de esta.

2) Péndulo de Foucalt: Un sistema mecánico simple que puede dar cuenta de la rotación de la tierra fue diseñado por Foucault el cula esta formado por un péndulo esférico de masa puntual m y largo l_o , el cual es solidario a un sistema no inercial el que gira con velocidad angular constante Ω. Sea x, y, z las coordenadas que describen el sistema no inercial, en estas coordenadas

2-a ¿Cuál es el lagrangeano que describe a este péndulo?.

2-b Encuentre las cantidades conservadas de este sistema e interprete a que simetrias infinitesimales están relacionadas estas cantidades conservadas.

2-c Encuentre las ecuaciones de movimiento e interprete fisicamente los términos de esta.

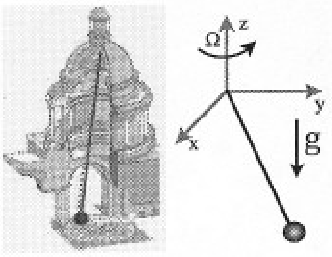


FIG. 2. Péndulo de Foucault.

3) Frecuencia natural de oscilación: considere un cilindro de masa m, radio r y momento de inercia I con respecto al eje de simetría del cilindro. El cual rueda sin resbalar sobre una superficie cilíndrica de radio R, como se muestra el la figura

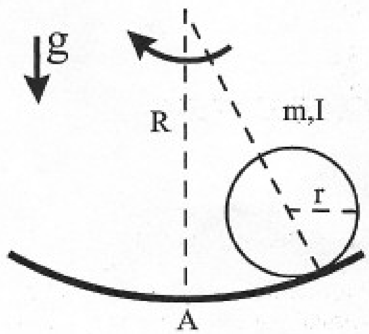


FIG. 3. Cilindro sobre una superficie curva.

3-a Encuentre el lagrangeano que caracteriza a este sistema.

3-b ¿Cuál es la ecuación de movimiento que describe la dinámica del cilindro?.

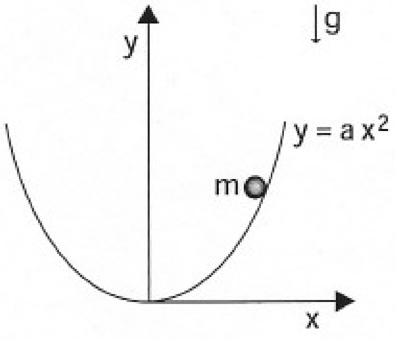
3-c El cilindro en la posición A de la superficie es un equlibrio estable. Encuentre la frecuencia natural de oscilación[1] y analice fisicamente esta frecuencia.

[1] Es decir, estudie la ecuación linealizada entorno al equilibrio y encuentre los valores porpios

Sistemas Dinámicos

Control 1: **Tiempo:** **3** hora
Profs: Felipe Barra, Nicolás Mujica

Problema 1
Una partícula puntual de masa m se mueve en una parábola de ecuación $y = ax^2$ bajo la acción de la fuerza de gravedad. Calcule la fuerza de restricción que actua sobre la párticula. Interprete esta fuerza.



Problema 2
Considere una partícula puntual de masa m que se mueve en la superficie de un cilindro de radio R. La partícula, además, está unida a un resorte de largo natural l_0 y constante k al origen del sistema de coordenadas. Despreciando la gravedad:
(3 pts) a) Escriba el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento para este sistema.
(3 pts) b) Analice la existencia de puntos de equilibrio y su estabilidad para diferentes valores del parámetro $\mu = l_0 - R$.

Figura Problema 2

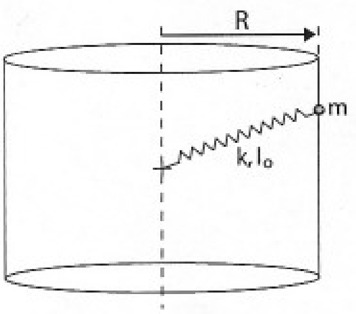
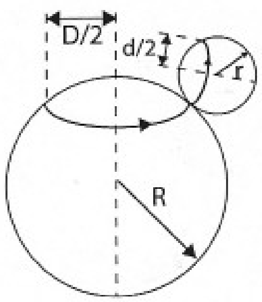


Figura Problema 3

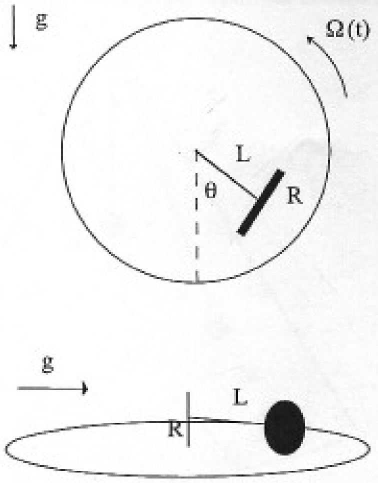


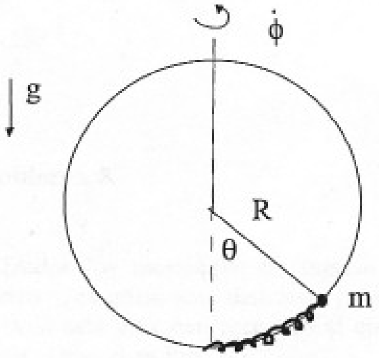
Problema 3
Considere el dibujo de la figura, en que una esfera de radio r rueda sobre otra (fija) de radio R sin resbalar de modo tal que:
El punto de contacto entre ambas se mueve sobre una circunsferencia de diámetro D sobre la esfera de radio R y otra de diametro d sobre la esfera de radio r.
(4 pts) a) Calcule la velocidad angular $\vec{\omega}$ de la esfera que rota.
(2 pts) b) Asumiendo conocido el momento de inercia I de la esfera calcule la energía cinética del sistema.

Sistemas Dinámicos

Control 1: Tiempo: **3** horas
Prof: Felipe Barra, Aux: Maximiliano Moyano

Problema 1
Un disco de radio R y masa M se encuentra apoyado sobre una superficie vertical que gira con velocidad angular $\Omega(t)$ no constante. El contacto es de tal manera que el disco rueda sobre su eje, sin resbalar sobre la superficie. Además, el disco se encuentra sujeto por una vara sin masa de largo L al punto fijo O, tal como muestran las figuras de la izquierda.





Se pide
a) Encontrar la ecuación de movimiento para el ángulo θ que forma el eje del disco respecto a la vertical.
b) Si $\Omega(t) = \alpha t$, encuentre los ángulos de equilibrio y determine su estabilidad.
Nota: El tensor de inercia de un disco de masa M y radio R respecto de su centro de masa es:

$$\mathbb{I} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2
Una masa puntual m puede deslizar sin roce sobre un anillo de radio R colocado en posición vertical en el campo gravitacional terrestre (ver figura a la derecha). El anillo puede girar sobre un eje vertical que pasa por su centro y la masa m está unida a un resorte de constante k fijo al otro extremo en el punto más bajo del anillo. El resorte tiene largo natural $R\theta_0$
a) Escriba el lagrangano del sistema
b) Encuentre cantidades que se conservan en el movimiento y defina un potencial efectivo para el sistema
c) Determine puntos fijos y su estabilidad

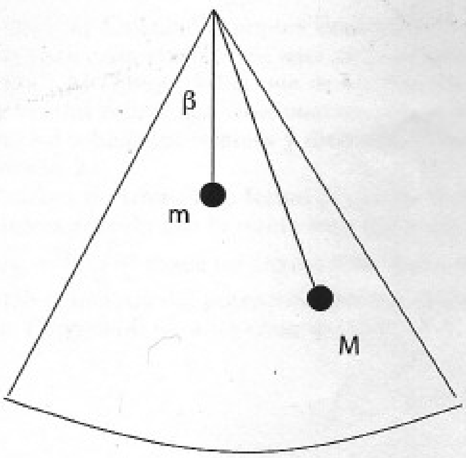
Problema 3
Una partícula de masa m se mueve sobre una parábola de ecuación $y = x^2$. Este sistema se encuentra inmerso en el aire y por lo tanto sobre la partícula actua una fuerza viscosa $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$ y además la fuerza de gravedad $\vec{F}_g = -mg\hat{y}$. Escriba y resuelva la ecuación de movimiento.

Sistemas Dinámicos

Control 1: **Tiempo:** **3** horas
Prof: Felipe Barra, Aux: Carlos Orellana, Eduardo Saavedra

Problema 1

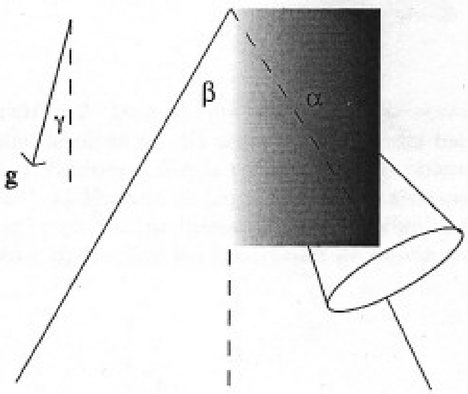
Dos partículas de masas m y M unidas por una cuerda inextensible se mueven como se ilustra en la figura. Una de ellas sobre un cono de ángulo β cuyo eje coincide con en eje vertical (hay gravedad) y la otra en el eje $\hat{z}$. Escriba el Lagrangiano y determine las ecuaciones de



movimineto. Encuentre cantidades conservadas y discuta el significado. Analice el movimiento típico del sistema usando el método del potencial efectivo. Dibuje el retrato de fase para este sistema reducido. En que casos el movimieto terminará porque una de las partículas llega al origen del cono?

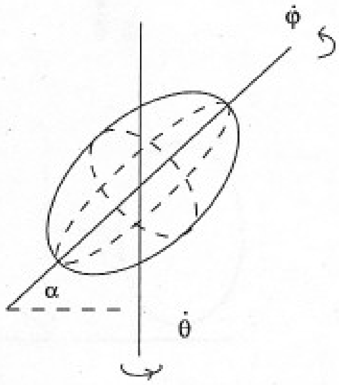
Problema 2

Considere un cono de ángulo α que rueda sin resbalar sobre otro cono de ángulo β como se muestra en la figura. Suponga que el centro de masa se encuantra a una distancia l de la punta del cono y que los momentos de inercia con respecto al centro de masa $I_1 = I_2$ e I_3 son dados. Escriba la energia cinética del sistema. Si el eje del cono fijo forma un ángulo γ con el eje vertical (hay gravedad), escriba el Lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del cono. Para que valor de γ la condición de rodar sin resbalar no puede satisfacerce?



Problema 3

a) Dados los momentos de inercia de un elipsoide simétrico (¿cuantos son distintos?), escriba la energía cinética si este gira con respecto al eje $\hat{z}$ y a su eje de simetría. Obs. α es fijo.



b) Considere el sistema descrito por el Lagrangiano $L = \frac{m}{2} e^{\gamma t}(\dot{q}^2 - \lambda q^2)$ ¿que sistema físico representa? En particular indique el significado de los parámetros m, γ, λ. Resuelva las ecuaciones de movimiento con ayuda de la transformación $q(t) = e^{-\gamma t/2} Q(t)$